AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

تقدير مَعْلَمَاْت توزيع كوماراسوامي – باريتو بواسون باستعمال طريقتي المربّعات الصغرى والطريقة المعتَمّدة على النسب المئوية والمقارنة بينهما

An Estimation of Parameters of Kumaraswamy Pareto Poisson Distribution Using the Method of Least Squares and the Method Based on Percentages and their Comparison

إسراء هاشم عبدالواحد[1]
أ. د. عباس لفتة كنيهر[2]

Israa Hashim Adulwahid
Prof. Dr. Abbas Lafta Kneehr

israa abdulwahid523@uowasit.edu.iq
alafta@uowasit.edu.iq

جامعة واسط / كلية الإدارة والاقتصاد/قسم الإحصاء

https://doi.org/10.29124/kjeas.1549.3

المستخلص:

تَمّ في هذا البحث تقديم توزيع جديد مبني على تعميم كوماراسوامي G بواسون ،ومن ثَمّ تقديم دالّة التوزيع التراكمية (CDF) ودالّة الكثافة الاحتمالية (pdf) و من المتوقّع أنْ يكون التوزيع الجديد أكثر مرونة وملائمة من التوزيع الأساس ،وذلك عن طريق إضافة معالم جديدة .ايضا تَمّ تقديم بعض الخصائص المهمة مثل دالّة البقاء ،وكذلك تَمّ اقتراح الطريقة لغرض تقويم طريقة التقدير المقترحة

وذلك من خلال استعمال معيار متوسّط مربعات الأخطاء (MSE) والتحيّز (BIAS) وقد أظهرت تجارب المحاكاة أنّ الطريقة المعتَمّدة على النسب المئوية وطريقة المربّعات الصغرى أثبتت كفاءة طريقتي التقدير في تقدير مَعْلَمَاْت النموذج وبالمقارنة تَبيّنَ أنْ الطريقة المعتَمّدة على النسب المئوية هي الأفضل، وذلك لأن التوزيع ملتوا ويمتلك ذيل طويل نحو اليمين وتَمّتلك (MSE) و(BIAS) أقل ما يمكن.

Abstract

This study exhibits a new distribution based on Kumaraswamy- G Poisson's generalization. It shows how the cumulative distribution function (cdf) and the probability density function

(pdf) of a new distribution are presented. It has been expected that the new distribution will be more flexible and appropriate than the base distribution, this can be achieved by adding new parameters. Some important properties were also presented, such as the survival function. Moreover, the method based on percentages and the method of least squares are proposed to estimate the parameters of the new distribution. A particular simulation is also conducted here for the purpose of evaluating the proposed estimation method, this is by using the mean square error (MSE) and the bias (BIAS). It has been concluded that the simulation experiments have shown that the method based on percentages and the method of least squares have proven its efficiency of the two estimation methods in estimating the parameters of the model, and by comparison, it was found out that the method based on percentages is the best, because the distribution is skewed and has a long tail towards the right and has at least (MSE) and (BIAS).

Keyword: Kumaraswamy –Poisson , Survival Function, Least Square Method & Method Based on Percentiles , *Simulatio*n

1- المقدّمة (Introduction) (1)

تَمّ ايجاد التوزيع الجديد (**Kumaraswamy - Pareto Poisson Distribution**) عن طريق تركيب توزيع (Kumaraswamy Poisson) مع توزيع (Pareto Distribution) ، وكذلك تَمّ تقدير مَعْلَمَاْت التوزيع الجديد بطريقتين (طريقة المربّعات الصغرى والطريقة المعتَمّدة على النسب المئوية) ، في السنوات الأخيرة تَمّ تقديم العديد من طرائق توليد توزيعات جديدة تَمّ تطويرها ومناقشتها من قبل الباحثين. فقد تَمّ تقديم طريقة توليد عائلة بيتا (Beta-generated family) من قبل (Eugen et al.) (2002) فضلا عن (Zagrafos and Balakrishnan)(2009) الذين قَدّما توليد عائلة توزيعات كاما. وفي الآونة الأخيرة قَدّم العالم (Castro) (2011) عائلة كوماراسوامي –العامّة (Kumarasawamy-G family(Kw-G)) بفرض أنّ $G(x)$ تمثّل دالّة التوزيع التراكمية (CDF) لمتغير عشوائي ما. فإنّ دالّة التوزيع التراكمي لكوماراسوامي العام وتعطى بالصيغة الأتية:

$$H_{a,b}(x) = 1 - [1 - G(x)^a]^b \qquad \alpha,b> 0 \qquad (1)$$

إذ أنّ $a > 0 , b > 0$ هما معلمتي الشكل الإضافيتين إلى التوزيع الأساس (G) والذي بحسب طبيعته يتحكّم بالالتواء وطول ذيل التوزيع الجديد.

من الصيغة (1) يمكن الحصول على دالّة كثافة التوزيع الاحتمالية (P.d.f) وفقا للآتي

$$h_{a,b}(x) = abg(x)G(X)^{a-1}[1 - G(X)^a]^{b-1} \qquad (2)$$

2- مشكلة البحث:

نتيجة للتزايد الكبير في البيانات من حيث الكم والنوع ، فإنّ ذلك يتطلب إلى ايجاد توزيعات جديدة معلمية تمكّننا من وصف أفضل الظواهر او التجارب المدروسة ،لذلك فأنْ تقديم مثل هكذا توزيعات يكون من الأهمية في التعامل مع المشكلات الأحصائية عندما يرغب الباحث في تحصيل دقة أكبر لسلوكيات تلك البيانات في المستقبل مبينة على التوزيعات المتوفرة.

3- هدف البحث:

يهدف البحث إلى تقديم توزيع جديد كتعميم لتوزيع كومارسوامي يطلق عليه توزيع كوماراسومي – باريتو بواسون ،وذلك من خلال استبدال دالّة G(x) بصيغة دالّة توزيع تراكمية لتوزيع باريتو، ومِنْ ثَمّ التعويض بدالّة التوزيع التراكمية لتوزيع كوماراسوامي بواسون ومِنْ ثَمّ تقديم بعض طرائق التقدير لمَعْلَمَاْت الأنْموذج بغية المقارنة بين هذه الطرائق باستعمال بعض المقاييس الإحصائية ثَمّ إجراء دراسة محاكاة لغرض المفاضلة بين هذه الطرائق.

4- اهمية البحث:

تتَمّثل أهمّية موضوع البحث في تقديم نموذجا من التوزيعات المعمّمة يكون اكثر واقعية ومرونة في نمذجة البيانات، وذلك من خلال تحسين التوزيع الأصلي الأساس بإضافة معالم جديدة للتوزيع، وجعله أكثّر أهمّية ومرونة لبعض البيانات التطبيقية.

5- توزيع كوماراسوامي بواسون (Kumaraswamy –Poisson) [1]

لنفترض أنّ نظامًا معينا يتكّون من N من دوال الأنظمة الفرعية المستقلة في زمن معين ، بحيث أنّ N تمّثل متغيّر بواسون العشوائي المبتور بدالّة كتلة احتمالية.

$$P_N(k,\lambda) = p(x = k|x > 0 >) = \frac{f(k,\lambda)}{1-f(0,\lambda)} = \frac{f(k,\lambda)}{p(X>0)}$$

$$f(k,\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P(X > 0) = 1 - Pr(X \leq 0) = 1 - Pr(X = 0)$$

$$= 1 - \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = 1 - e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!\,(1 - e^{-\lambda})}$$

نضرب البسط والمقام في e^{λ} فينتج الآتي:

$$\frac{\lambda^k}{k!\,(e^{\lambda}-1)} \qquad k = 1,2,\dots$$

لنفترض أنّ أوقات الفشل لكل نظام فرعي يمتلك توزيع KW-G المعرّف بالعلاقة (*1*) لكل X> 0. فضلا عن ذلك لنفترض أنْ Yi يمثل وقت الفشل للنظام الفرعي (i) **وأنْ (x)** تمّثل وقت الفشل الأول من N من دوال الأنظمة الفرعية Time to failure of the first out of N function subsystem عليه يمكن أنّ يعبر عن x بالآتي:

$$x = min(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

وعليه فأنْ دالّة التوزيع التراكمية لx المشروطة ب N ستكون كالآتي:

$$P(X > x|N) = 1 - Pr(X \le x|N) = 1 - Pr(Y > x)^N$$

$$= 1 - \left[1 - \mathrm{H_{a,b}}(x)\right]^N$$

وأنّ دالّة التوزيع غير الشرطية ل (X) و($k > 0$) يمكن التعبير عنها بالآتي:

$$F(x) = \frac{1}{(e^{\lambda}-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^k \left\{1 - \left[1 - H_{a,b}(x)\right]^k\right\}}{k!}$$

$$= \frac{1-e^{\left[-\lambda H_{a,b}(X)\right]}}{1-e^{-\lambda}}$$

أنّ دالّة (CDF) لتوزيع كوماراسوامي بواسون هي كالآتي:

$$F(X) = \frac{1-e^{(-\lambda\, G(X))}}{1-e^{-\lambda}} \qquad (3)$$

وأنّ دالّة (pdf) لتوزيع كوماراسوامي بواسون هي كما يأتي:

$$f(x) = \frac{\lambda\, g(x) e^{(-\lambda\, G(X))}}{1-e^{-\lambda}} \qquad (4)$$

6- توزيع باريتو (Pareto Distribution) [2]

هو التوزيع ذو المعلمتين (α,M)الذي سمّي على اسم استاذ الأقتصاد (فيلفريدو باريتو) ،وهو التوزيع الاحتَمّالي المستمرّ المستعمل في العديد من التطبيقات العملية مثل توزيع الدخل ، الإحصاءات السكانية ، توزيع احتياطي النفط العالمي وغيرها من المجالات وهو أول من وضع قانون شامل للتعامل مع توزيع الدخل.

ويمتلك دالّة التوزيع التجميعية التي تعطى بالصيغة الأتية:

$$F(x)=1-(\frac{M}{X})^{\alpha} \qquad x\geq M \quad ,\alpha,M>0 \qquad (5)$$

ويمتلك توزيع باريتو دالّة كثافة الاحتمال الآتية:

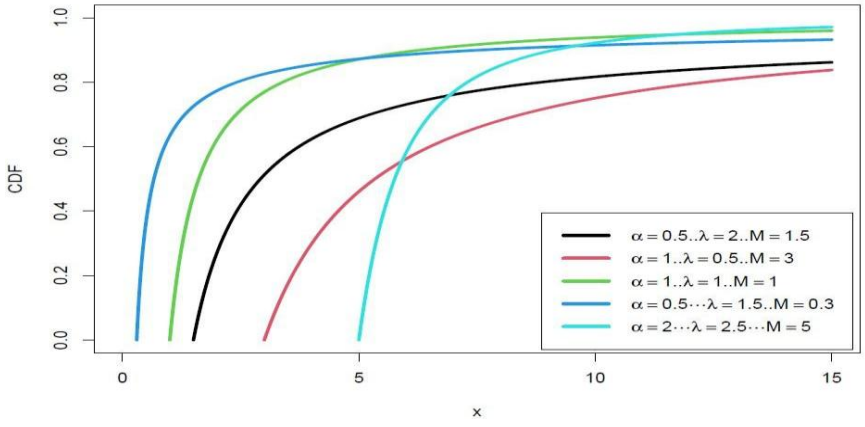
$$f(x)=\frac{\alpha M^{\alpha}}{X^{\alpha+1}} \qquad x\geq M, \quad \alpha,M>0 \qquad (6)$$

نحصل على دالّة التوزيع التراكمية لتوزيع كوماراسوامي- باريتو بواسون بتعويض المعادلة (5) في المعادلة (3) فينتج الآتي:

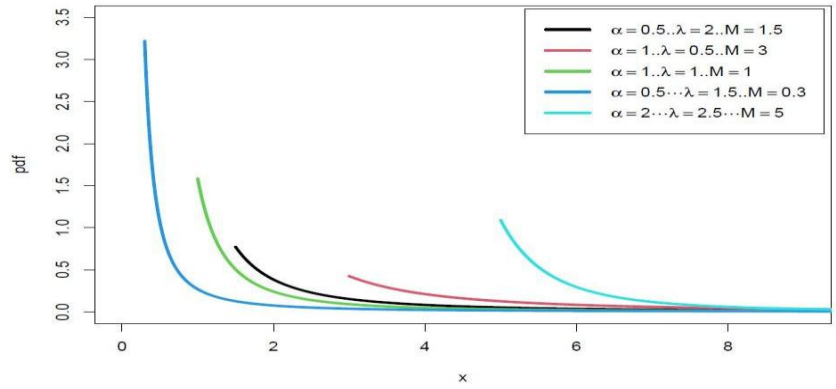
$$F(x)=\frac{1-e^{-\lambda\left(1-\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}\right)}}{1-e^{-\lambda}} \qquad (7)$$

نحصل على دالّة الكثافة الاحتَمّالية لتوزيع كوماراسوامي- باريتو بواسون بتعويض المعادلة (5,6) في المعادلة (4) فينتج الآتي:.

$$f(x)=\frac{\lambda\alpha M^{\alpha}x^{-\alpha-1}e^{\lambda\left(\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}\right)}}{e^{\lambda}-1} \qquad (8)$$



الشكل (1) يمثّل سلوك دالّة (C.D.F) لتوزيع كوماراسوامي – باريتو بواسون بمعالم مختلفة



الشكل (2) يمثّل سلوك دالّة (P.d.f) لتوزيع كوماراسوامي – باريتو بواسون بمعالم مختلفة

7- دالّة البقاء (Survival Function) [3]

هي فرصة بقاء عنصر أو فرد على قيد الحياة في وقت معيّن ، وقادرة على نمذجة اشكال مختلفة من معدّلات الفشل. وتعطى بالصيغة الأتية:

$$S(x) = p(X \leq x) = 1 - F(x)$$

$$1 - F(x) = 1 - \left[\frac{1-e^{-\lambda\left(1-\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}\right)}}{1-e^{-\lambda}}\right]$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda} - 1 + e^{-\lambda\left(1-\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}\right)}}{1 - e^{-\lambda}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda\left(1-\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}\right)} - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

$$S(x) = \frac{e^{-\lambda}\left[e^{\lambda\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}} - 1\right]}{1 - e^{-\lambda}} \qquad (9)$$

8- طراق التقدير :Estimation Methods

توجد العديد من طرائق التقدير الخاصّة ويتَمّ هنا اختبار طريقتي المربّعات الصغرى والطريقة المعتَمّدة على النسب المئوية وكما يأتي:

1- طريقة المربّعات الصغرى (Least Square Method) (L.S) [4]

هي الطريقة التي اقترحها عالم الرياضيات الالماني (Carl Friedrich Gauss) وهي من الطرق التي تتمّيز ببعض الخصائص الاحصائية المهّمة ،والتي تجعلها واحدة من أقوى الطرائق التحليلية والأكثر شيوعا في نماذج الانحدار الخطّي وغير الخطّي وتستعمل لتقليل الخطأ المتبقّي بين القيمة الحقيقية والقيمة المتوقّعة. ولما كانت دالّة التوزيع التراكمية لتوزيع كوماراسوامي – باريتو بواسون هي دالّة غير خطّية ومن الصعوبة تقديرها فنحولها إلى معادلة خطية باستعمال الصيغة الآتية:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{F}(xi) - F(xi)\right)^2 \qquad (10)$$

$$let\widehat{F}\,(xi) = P_{1i} \qquad (11)$$

$$P_{1i} = \frac{i - 0.5}{n}$$

$$\boldsymbol{F(xi) = \frac{1-e^{-\lambda\left(1-\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}\right)}}{1-e^{-\lambda}}} \qquad (\mathbf{12})$$

$$\boldsymbol{1 - F(xi) = 1 - \frac{1-e^{-\lambda\left(1-\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}\right)}}{1-e^{-\lambda}} = \frac{1-e^{-\lambda}-1+e^{-\lambda\left(1-\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}\right)}}{1-e^{-\lambda}}}$$

$$\boldsymbol{1 - F(xi) = \frac{-e^{-\lambda} + e^{-\lambda\left(1-\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}\right)}}{1 - e^{-\lambda}}}$$

نضرب ونقسم على $\boldsymbol{\frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}}}$

$$\boldsymbol{= \frac{-1+e^{\lambda\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}}}{e^{\lambda}-1} = \frac{e^{\lambda\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}}-1}{e^{\lambda}-1}}$$

$$1 - F(xi) = \frac{\boldsymbol{e^{\lambda\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}} - 1}}{\boldsymbol{e^{\lambda} - 1}} \qquad (13)$$

$$\frac{1}{1-F(xi)} = \frac{\boldsymbol{e^{\lambda}-1}}{\boldsymbol{e^{\lambda\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}}-1}} \qquad (14)$$

بأخذ(ln) للطرفين:

$$ln\left[\frac{1}{1-F(xi)}\right]=ln\left(e^{\lambda}-1\right)-ln\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}}-1\right) \qquad (15)$$

$$Z_{1i}=ln\left(\frac{1}{1-\hat{F}(xi)}\right)$$

$$Z_{1i}=-ln(1-p1i)$$

نعوض عن كُلّ من قيمة $F(xi)$ وقيمة $\hat{F}(xi)$ بالمعادلة (10)

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}\left(Z1i-\left(ln\left(e^{\lambda}-1\right)-ln\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}}-1\right)\right)\right)^2 \qquad (16)$$

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}\left(Z_{1i}-ln\left(e^{\lambda}-1\right)+ln\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}}-1\right)\right)^2$$

نشتقّ المعادلة S_1 بالنسبة للمعالم (λ,α,M) وكالآتي:

نشتقّ المعادلة S_1 بالنسبة للمعلمة (α) فنحصل على الآتي:

$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha}=\sum_{i=1}^{n}2\left(Z_{1i}-ln\left(e^{\lambda}-1\right)+ln\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}}-1\right)\right)\left(\frac{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}}\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}ln\left(\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{x}}\right)}{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}}-1}\right) \qquad (17)$$

نشتقّ المعادلة S_1 بالنسبة للمعلمة (λ) فينتج الآتي:

$$\frac{\partial S_1}{\partial \lambda}=\sum_{i=1}^{n}2\left(Z_{1i}-ln\left(e^{\lambda}-1\right)+ln\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}}-1\right)\right)\left(\frac{-e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}+\frac{\left(\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}}}{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}}-1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2\left(Z_{1i} - ln(e^{\lambda}-1) + ln\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{x}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}} - 1\right)\right)\left(\frac{e^{\lambda}}{1-e^{\lambda}} + \frac{\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{x}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}}}{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{x}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}} - 1}\right) \quad (18)$$

نشتقّ المعادلة S_1 بالنسبة للمعلمة (M) فينتج الآتي:

$$\frac{\partial S_1}{\partial M} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(Z_{1i} - ln(e^{\lambda}-1) + ln\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{x}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}} - 1\right)\right)\left(\frac{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{x}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}}\frac{\alpha \lambda}{x^{\alpha}}M^{\alpha-1}}{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{x}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}} - 1}\right) \quad (19)$$

بمساواة المشتقات المذكورة آنفاً بالصفر للحصول على تقديرات المعالم $(\widehat{M},\widehat{\alpha},\widehat{\lambda})$ ولما كانت المعادلات معقدة وليست من الدرجة الأولى عليه تُحل بطرائق عددية باستعمال خوارزميات معيّنة مثل نيوتن رافسون.

2- الطريقة المعتَمّدة على النسب المئوية (Method Based on Percentiles) [5]

هي الطريقة التي قدّمها الباحثان (Hyndman and Fan) في العام (1996) والتي ذكرا فيها أنّ العيّنة تنتج كمية أمثل في مجموعة كُلّ المقدرات التي وسيطها غير متحيّز، ونحصل عليها من مساواة المعادلة (7) بالنسبة المئوية (pi).

$$pi = \frac{i}{n+1}.$$

$$pi = CDF.$$

$$\Rightarrow pi = \frac{1 - e^{-\lambda\left(1-\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}\right)}}{1-e^{-\lambda}} \quad (20)$$

$$\Rightarrow pi = \frac{1 - e^{-\lambda}e^{\lambda\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}}}{1-e^{-\lambda}}$$

نضرب البسط والمقام في e^{λ} فنحصل على الآتي:

$$p_i = \frac{e^{\lambda} - e^{\lambda\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}}}{e^{\lambda} - 1} \Rightarrow p_i\left(e^{\lambda} - 1\right) = e^{\lambda} - e^{\lambda\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}} \Rightarrow e^{\lambda\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}} = e^{\lambda} - p_i\left(e^{\lambda} - 1\right)$$

بأخذ (ln) للطرفين فنحصل على الآتي.:

$$ln\left(e^{\lambda\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}}\right) = ln\left(e^{\lambda} - p_i\left(e^{\lambda} - 1\right)\right) \qquad (21)$$

$$\lambda\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha} = ln\left(e^{\lambda} - p_i\left(e^{\lambda} - 1\right)\right)$$

$$\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha} = \frac{ln\left(e^{\lambda} - p_i\left(e^{\lambda} - 1\right)\right)}{\lambda}$$

$$\left(\frac{M}{x}\right) = \left(\frac{ln\left(e^{\lambda} - p_i\left(e^{\lambda} - 1\right)\right)}{\lambda}\right)^{1/\alpha}$$

$$\left(\frac{M}{x}\right) = \lambda^{-1/\alpha}\left(ln\left(e^{\lambda} - p_i\left(e^{\lambda} - 1\right)\right)\right)^{1/\alpha}$$

$$x_{p_i} = \frac{M}{\lambda^{-1/\alpha}\left(ln\left(e^{\lambda} - pi(e^{\lambda} - 1)\right)\right)^{1/\alpha}}$$

$$x_{p_i} = M\lambda^{1/\alpha}\left(ln\left(e^{\lambda} - p_i\left(e^{\lambda} - 1\right)\right)\right)^{-1/\alpha} \qquad (22)$$

$$xi = mpi(\alpha, \lambda, M) + Ui$$

إذْ أنّ (xi) يمثّل دالّة بدلالة المعالم (α, λ, M)

أمّا (Ui) يمثّل حدّ الخطأ الناتج من الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية

$$U_i = x_i - mp_i(\alpha, \lambda, M)$$

ولما كانت مجموع الأخطاء يساوي صفر لذلك سنعمل على ايجاد مجموع مربعات انحرافات القيم .

$$Qi = \sum_{i=1}^{n} U_i^2$$

إذْ أنّ (Qi) تمثل مجموع مربعات حدّ الخطأ

$$Q(\alpha,\lambda,M)=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-M\,\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\left(ln\left(e^{\lambda}-p_i\left(e^{\lambda}-1\right)\right)\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)^2 \qquad (23)$$

نأخذ المشتقات الجزئية للمعالم (α, λ, M) فنحصل على الآتي:

$$\frac{dQ}{dM}=\sum_{i=1}^{n}2\left(X_i-M\,\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\left(ln\left(e^{\lambda}-p_i\left(e^{\lambda}-1\right)\right)\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(ln\left(e^{\lambda}-p_i\left(e^{\lambda}-1\right)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \qquad (24)$$

$$\frac{dQ}{d\alpha}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}2\left(X_i-M\,\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\left(ln\left(e^{\lambda}-p_i\left(e^{\lambda}-1\right)\right)\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)\left(\frac{M\,\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\,ln(\lambda)}{\alpha^2\left(ln\left(e^{\lambda}-p_i\left(e^{\lambda}-1\right)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right.$$

$$\left.-\frac{M\,\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\,ln\left(ln\left(e^{\lambda}-p_i\left(e^{\lambda}-1\right)\right)\right)}{\alpha^2\left(ln\left(e^{\lambda}-p_i\left(e^{\lambda}-1\right)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \qquad (25)$$

$$\frac{dQ}{d\lambda}=\sum_{i=1}^{n}2\left(X_i-M\,\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\left(ln\left(e^{\lambda}-p_i\left(e^{\lambda}-1\right)\right)\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\right)$$

$$\left(\frac{\lambda^{\frac{1}{\alpha}} M \left(e^{\lambda} - p_i\, e^{\lambda}\right)}{\alpha \left(ln\left(e^{\lambda} - p_i\,(e^{\lambda} - 1)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}+1} \left(e^{\lambda} - p_i\,(e^{\lambda} - 1)\right)} - \frac{\lambda^{\frac{1}{\alpha}-1} M}{\alpha \left(ln\left(e^{\lambda} - p_i\,(e^{\lambda} - 1)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \qquad (26)$$

بمساواة المشتقّات المذكورة آنفاً بالصفر للحصول على تقديرات المعالم $(\widehat{M}, \widehat{\alpha}, \widehat{\lambda})$ ولمّا كانت المعادلات معقّدة وليست من الدرجة الأولى عليه تحّل بطرائق عددية.

9- المحاكاة (*Simulation*) [6]

من أجل تقويم أداء الطريقة المعتمدة على النسب المئوية وطريقة المربّعات الصغرى لتقدير مَعْلَمَاْت التوزيع المقترح ولغرض المقارنة بين الطريقتين استعملنا دراسة المحاكاة لإجراء خمس تجارب مع قيم أحجام عينّات مختلفة (n=10,25,50,100) ، وافترضنا أيضا خمس قيم مختلفة لُكلّ معلمة من مَعْلَمَاْت التوزيع هي *(α=0.5,1,1,0.5,2)* *(M=1.5,3,1,0.3,5).* *(λ=2,0.5,1,1.5,2.5)*, وبتكرار العملية (*1000*) مرة لغرض الوصول إلى نتائج اكثر موثوقية من اجل الحصول على متوسّط مربعات الخطأ (*MSE*) والتحيّز (*BIAS*) ولأجل تقويم مدى كفاءة طرائق التقدير استعمال معيار متوسّط مربعات الخطأ (MSE) للوصول إلى أفضل الطرائق وأنّ الطريقة المعتمّدة على النسب المئوية تؤدّي أداء جيدا في تقدير مَعْلَمَاْت التوزيع المقترح. ومن خلال عرض النتائج في الجدول (*1,2*) وُجد أنَّ التحيّزات ومتوسّط مربعات الخطأ تتناقص مع زيادة حجم العيّنة.

10- نتائج الطريقة المعتَمّدة على النسب المئوية: في هذه الطريقة استعملنا خمس تجارب لقيم مَعْلَمَاْت افتراضية واستعملنا أحجام عينات مختلفة لتقدير مَعْلَمَاْت التوزيع المقترح بالمحاكاة وعرضت النتائج في الجدول (*1*)

الجدول (*1*) القيم التقديرية للمعالم (*M* ,λ, α) باستعمال طريقة (*Method Based on Percentiles*)

n	PARAMETAR			ESTMATOR			BAIS			MSE		
	α	λ	M	α	λ	M	α	λ	M	α	λ	M
10	0.5	2	1.5	0.4999353	2.000983	1.644766	-0.000064709	0.000983216	0.14476637	0.000000087	0.000007651	0.046209239
25				0.4999971	2.000027	1.55624	-0.000002945	0.000026879	0.05624047	0.000000021	0.000000356	0.006546686
50				0.5000002	1.999999	1.526491	0.0000002	-0.000001267	0.02649116	0.000000005	0.000000071	0.001392684
100				0.5000001	1.9999998	1.512806	0.0000001	-0.0000002	0.01280628	0.000000001	0.000000022	0.000316711
10	1	0.5	3	1.000653	0.4984318	3.260511	0.000652874	-0.001568206	0.26051084	6.82E-06	0.000092132	0.14874042
25				1.000115	0.4997535	3.095346	0.000115247	-0.000246463	0.09534626	7.00E-08	0.000000751	0.018748672
50				1.000022	0.4999229	3.047368	0.000021554	-0.000077135	0.04736837	1.00E-09	0.000000451	0.004397104
100				1.000004	0.4999881	3.02385	0.000004077	-0.000011884	0.02385007	0.00E+00	0.000000001	0.001100074
10	1	1	1	1.000948	1.0237462	1.067806	0.00094814	0.023746217	0.06780598	0.001297077	0.022684525	0.010549639
25				1.001789	0.9957476	1.027177	0.001788599	-0.004252446	0.02717712	0.000010474	0.000214418	0.001491438
50				1.000358	0.9989392	1.013089	0.000358206	-0.001060752	0.01308949	0.000000282	0.000006541	0.000347961
100				1.00007	0.9997717	1.006278	0.000069895	-0.000228293	0.00627768	0.000000007	0.000000164	0.000077759
10	0.5	1.5	0.3	0.4993069	1.508033	0.3345974	-0.000693129	0.008033409	0.03459742	3.51E-06	0.000275258	0.00258641
25				0.5000184	1.499872	0.313086	0.000018399	-0.000128198	0.01308602	3.00E-09	0.00000011	0.000363951
50				0.5000012	1.499993	0.3065841	0.000001208	-0.000007117	0.00658412	0.00E+00	0.00E+00	0.000088284
100				0.5000001	1.4999996	0.3031658	0.000000062	-0.000000435	0.0031658	0.00E+00	0.00E+00	0.000019218
10	2	2.5	5	1.97084	3.263203	5.090685	-0.029160416	0.76320338	0.09068488	0.064782442	0.88764601	0.017030785
25				1.983547	2.659081	5.036868	-0.016453461	0.1590809	0.03686844	0.004036792	0.039801397	0.002929116
50				1.988509	2.546065	5.017999	-0.011491337	0.04606493	0.01799867	0.000323382	0.003088187	0.000638586
100				1.995923	2.514035	5.009507	-0.004077497	0.0140351	0.00950691	0.000030468	0.000274119	0.000186188

من نتائج تقديرات الطريقة المعتمدة على النسب المئوية، التي عرضت في الجدول (1) القيم التقديرية للمعالم (α ,λ, M) ومنه يتبيّن أنّ (λ, α) كانت قريبة جدا من القيم الحقيقية بشكل نسبي أفضل من (M) وجميع الطرائق تزداد قربا بازدياد حجم العيّنة وأنْ قيم التحيّز كانت مقبولة إلى حدّ ما وتقترب كثيرا من الصفر بازدياد حجم العيّنة .

استعملنا أحجام عيّنات مختلفة فكانت القيم التقديرية قريبة جدا من القيم الحقيقية المفترضة لها ويزداد التقارب كُلمّا زاد حجم العيّنة. في الطريقة المعتَمَدة على النسب المئوية فكانت القيم التقديرية للمعلمتين (λ, α) أقرب إليها من المعلمة (M)

وبالنسبة للتجربة الأولى من القيم الافتراضية للمَعْلَمَاْت $(\alpha = 0.5 , \lambda = 2 , M = 1.5)$ فكانت قيمة (α) أقل تحيّزاً من المَعْلَمَاْت الأخرى تليها بفارق قليل المعلمة (λ) في حين تَمّيزتْ المعلمة (M) بوجود مقادير متحّيزة أكبر نسبيا من المعلمتين الآخرتين ، الا أنّ المَعْلَمَاْت جميعها تقترب بشكل كبير من الصفر بازدياد حجم العيّنة ، أمّا بالنسبة إلى (MSE) فكانت القيم التقديرية بالنسبة للمعلمتين (α, λ) قريبة جدا من الصفر ولاسيمّا بزيادة حجم العيّنة تليها المعلمة (M) وبفارق نسبي ملحوظ .

وبالنسبة للتجربة الثانية من القيم الافتراضية للمَعْلَمَاْت $(\alpha = 1 , \lambda = 0.5 , M = 3)$ فكانت قيمة (α) أقل تحيّزاً من المَعْلَمَاْت الاخرى ، تليها بفارق قليل المعلمة (λ) في حين تَمّيزت المعلمة (M) بوجود مقادير متحيزة اكبر نسبيا من المعلمتين الآخرتين ، الا أنْ جميع المَعْلَمَاْت تقترب بشكل كبير من الصفر بازدياد حجم العيّنة ، أمّا بالنسبة إلى (MSE) فكانت القيم التقديرية بالنسبة للمعلمتين (α, λ) قريبة جدا من الصفر ولاسيمّا بزيادة حجم العيّنة تليها المعلمة (M).

وبالنسبة للتجربة الثالثة من القيم الافتراضية للمَعْلَمَاْت $(\alpha = 1 , \lambda = 1 , M = 1)$ فكانت قيمة (α) أقل تحيّزاً من المَعْلَمَاْت الاخرى تليها بفارق قليل المعلمة (λ) في حين تَمّيزتْ المعلمة (M) بوجود مقادير متحيّزة أكبر نسبيا من المعلمتين الآخرتين ، إلا أنْ المَعْلَمَاْت جميعها تقترب بشكل كبير من الصفر بازدياد حجم العيّنة ، أمّا بالنسبة إلى (MSE) فكانت القيم التقديرية بالنسبة للمعلمتين (α, λ) قريبة جدا من الصفر ولاسيمّا بزيادة حجم العيّنة تليها المعلمة (M) بفارق نسبي ملحوظ.

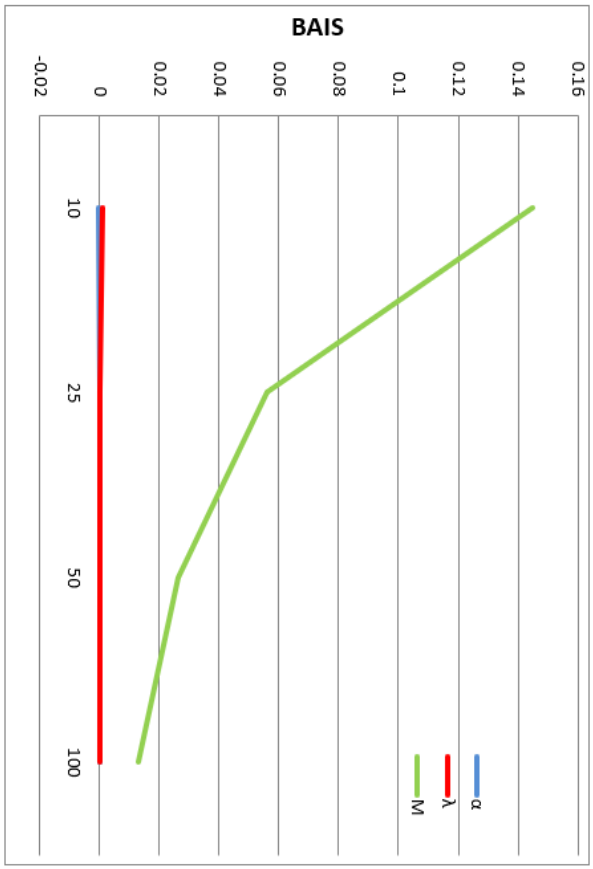
وبالنسبة للتجربة الرابعة من القيم الافتراضية للمَعْلَمَاْت $(\alpha = 0.5, \ \lambda = 1.5, \ M = 0.3)$ فكانت قيمة (α) أقل تحيّزاً من المَعْلَمَاْت الاخرى تليها بفارق قليل المعلمة (λ) في حين تَمّيزت المعلمة (M) بوجود مقادير متحيزة اكبر نسبيا من المعلمتين الآخرتين ، الا أنْ المَعْلَمَاْت جميعها تقترب بشكل كبير من الصفر بازدياد حجم العيّنة ، أمّا بالنسبة إلى (MSE) فكانت القيم التقديرية بالنسبة للمعلمتين (M, λ) قريبة جدا من الصفر ولاسيمّا بزيادة حجم العيّنة تليها المعلمة (α) بفارق نسبي ملحوظ

وبالنسبة للتجربة الخامسة من القيم الافتراضية للمَعْلَمَاْت $(\alpha = 2, \ \lambda = 2.5, \ M = 5)$ فكانت قيمة (α) أقل تحيّزاً من المَعْلَمَاْت الاخرى تليها بفارق قليل المعلمة (M) تليها المعلمة (λ)، الا أنْ المَعْلَمَاْت جميعها تقترب بشكل كبير من الصفر بازدياد حجم العيّنة ، أمّا بالنسبة إلى (MSE) فكانت القيم التقديرية بالنسبة للمعلمتين (α, M) قريبة جدا من الصفر ولاسيمّا بزيادة حجم العيّنة تليها المعلمة (λ) .

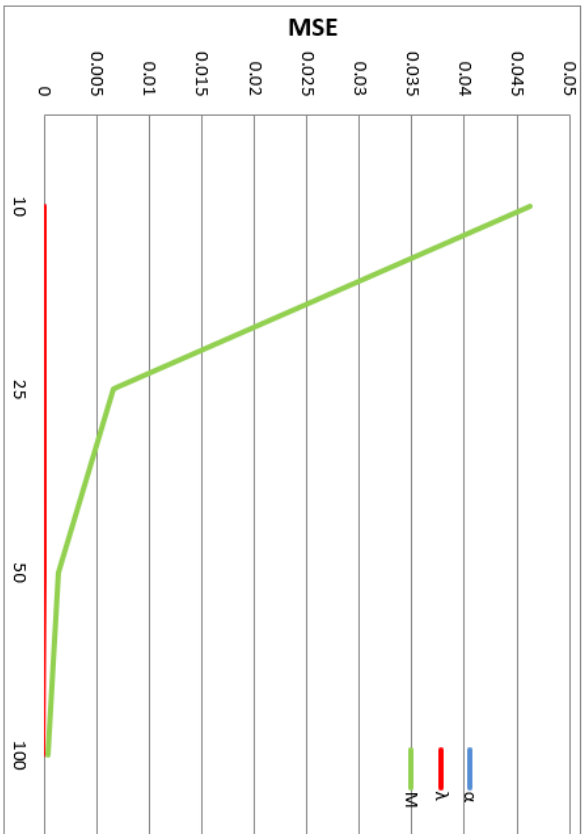
إنْ مقدار التحيّز للمعلمتين (α, λ) كان صغير جدا لدرجة أنه يقترب كثيرا من الصفر الا أنْ المعلمة (M) تَمّيزت بمقادير للتحيز اكبر نسبيا مقارنة بالمعلمتين (α, λ).

أمّا بالنسبة إلى (MSE) فكانت القيم التقديرية بالنسبة للمعلمة (α) أقل ما يمكن، تليها المعلمة (λ) ثُمّ تليها المعلمة (M).

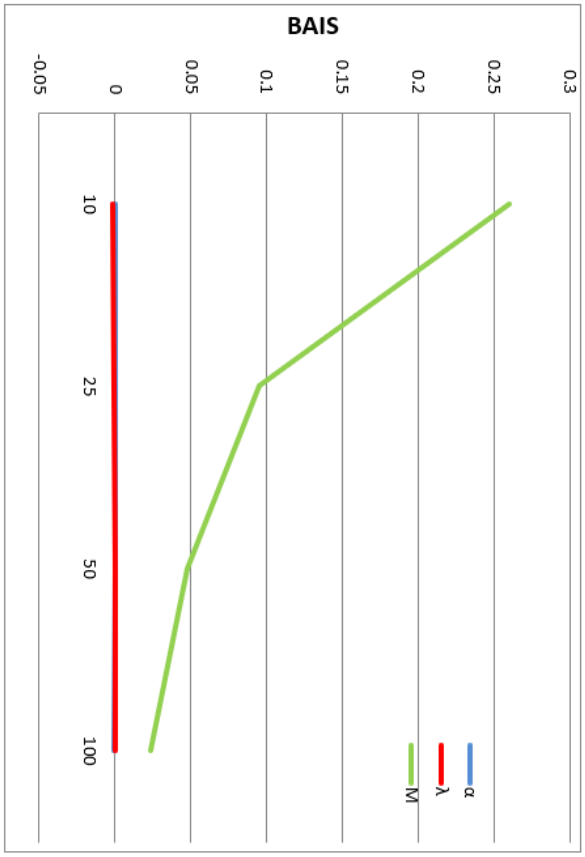
نلاحظ من خلال الرسوم ادناه التي سترد أنْ مقدّر المعلمة (α) هو أفضل مقدّر لأنّه يقترب كثيرا من الصفر ،ويمتلك أفضل (MSE) ،يليه مقدّر المَعلمة (λ)



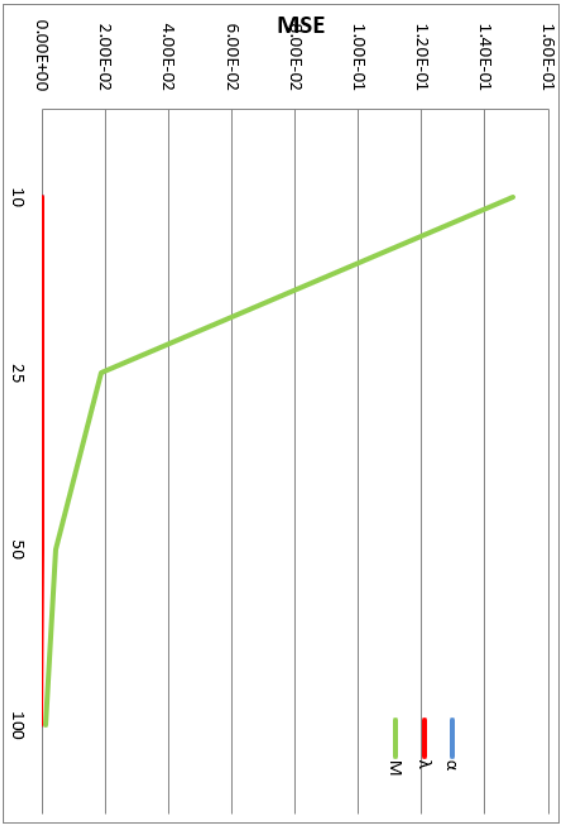
الشكل (3) يوضح تغّير قيم BIAS عندما (M=1.5 ,λ=2, α=0.5)



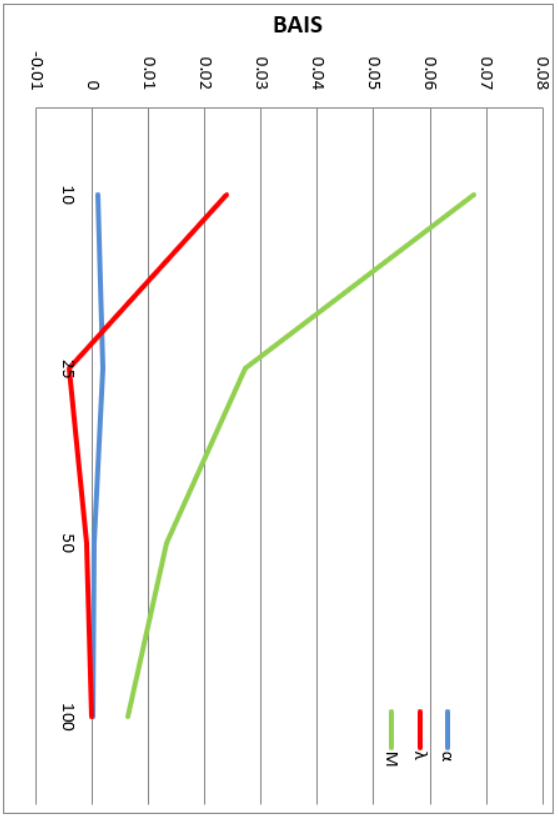
الشكل (4) يوضح تغّير قيم MSEعندما (M=1.5 ,λ=2, α=0.5)



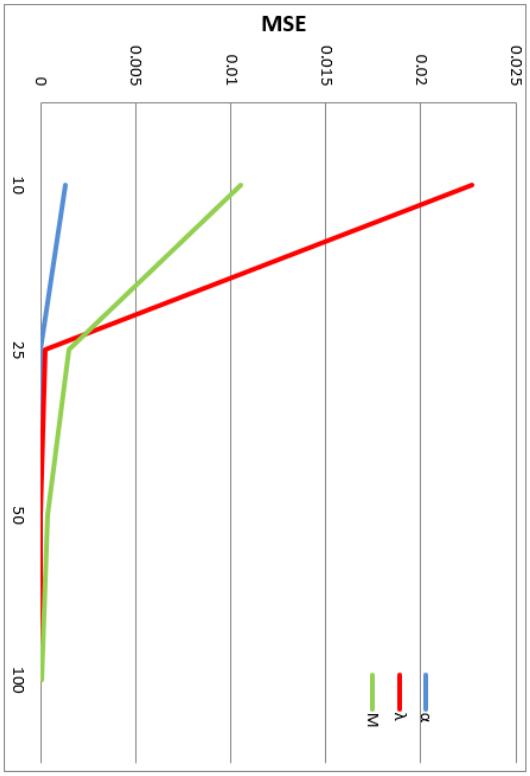
الشكل (5) يوَضح تغَير قيم BIASعندما (M=3 ,λ=0.5, α=1)



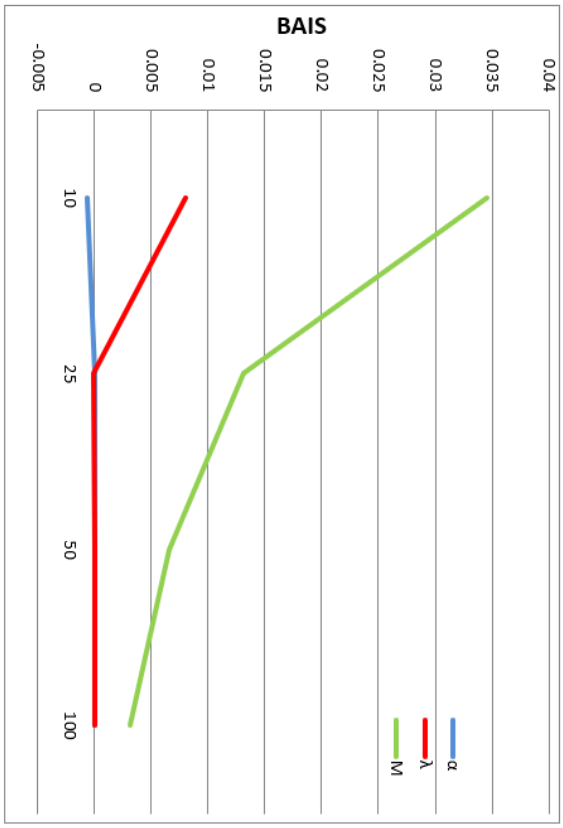
الشكل (6) يوضّح تغَير قيم MSEعندما(M=3 ,λ=0.5, α=1)



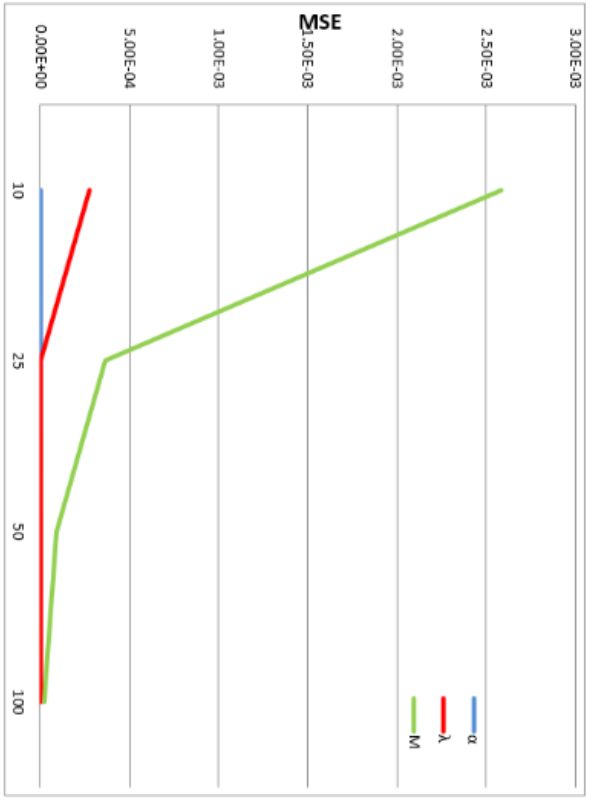
الشكل (7) يوضّح تغّير قيم BIAS عندما (M=1 ,λ=1, α=1)



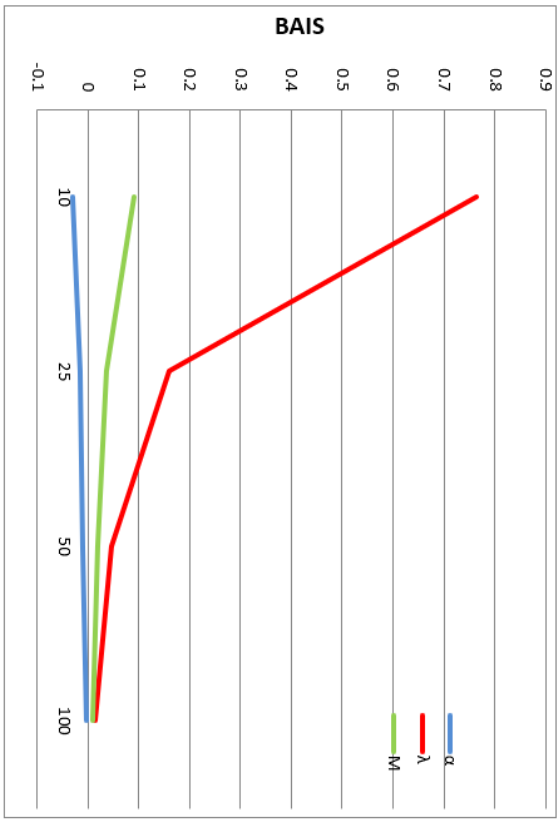
الشكل (8) يوضّح تغّير قيم MSE عندما(M=1 ,λ=1, α=1)



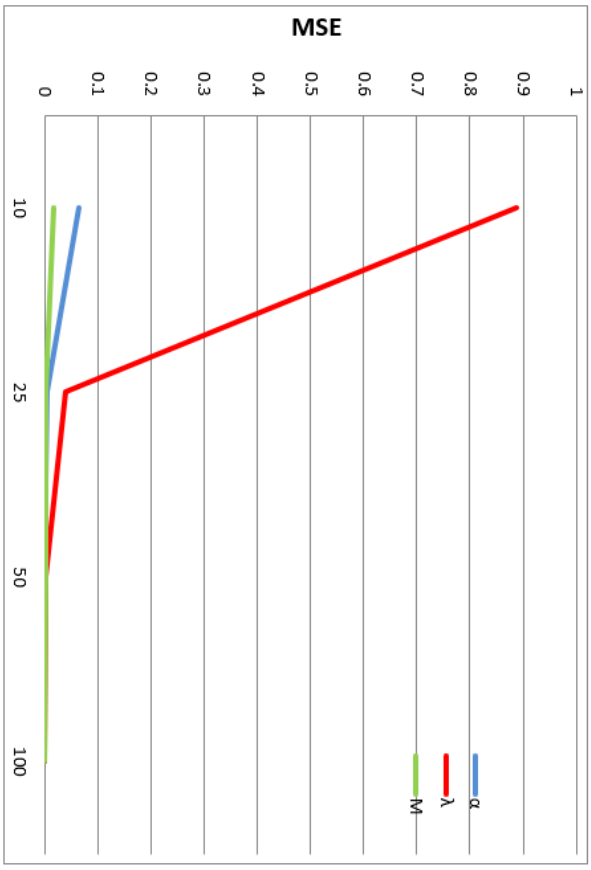
الشكل (9) يوضّح تغّير قيم BIASعندما (M=0.3 ,λ=1.5, α=0.5)



الشكل (10) يوضّح تغّير قيم MSEعندما(M=0.3 ,λ=1.5, α=0.5)



الشكل (11) يوضّح تغّير قيم BIAS عندما (M=5 ,λ=2.5, α=2)



الشكل (12) يوضّح تغّير قيم MSE عندما (M=5 ,λ=2.5, α=2)

11- نتائج طريقة المربّعات الصغرى: في هذه الطريقة استعملنا خمس تجارب لقيم مَعْلَمَاْت افتراضية واستعملنا أحجام عيّنات مختلفة لتقدير مَعْلَمَاْت التوزيع المقترح بالمحاكاة وعرضت النتائج في الجدول (2)

الجدول (2) القيم التقديرية للمعالم (M ,λ, α) باستعمال طريقة (Least Square Method)

n	PARAMETAR			ESTMATOR			BIAS			MSE		
	α	λ	M	α	λ	M	α	λ	M	α	λ	M
10	0.5	2	1.5	0.5173496	2.171191	1.652008	0.0173496	0.17119106	0.15200812	0.00317438	0.21212655	0.05469777
25				0.5021102	2.035495	1.555261	0.00211017	0.03549457	0.05526081	0.00015689	0.02320774	0.00607582
50				0.5004855	2.015732	1.528327	0.00048546	0.01573173	0.02832685	0.00003955	0.00482351	0.00159485
100				0.5000468	2.004074	1.512766	0.00004679	0.00407367	0.01276583	0.00000986	0.00112391	0.00032026
10	1	0.5	3	1.0255987	0.8391505	3.258477	0.02559875	0.33915052	0.25847662	0.02954794	0.55957755	0.15115511
25				0.9983839	0.5845644	3.099286	-0.0016161	0.08456436	0.09928594	0.00239749	0.05013715	0.0207176
50				0.9979626	0.5320836	3.048263	-0.00203745	0.03208356	0.04826251	0.00057904	0.01055825	0.00475071
100				0.9989327	0.511939	3.024568	-0.00106734	0.011939	0.02456823	0.00014899	0.0024634	0.00120652
10	1	1	1	1.0321773	1.319821	1.073949	0.03217733	0.31982093	0.07394906	0.02750296	0.55359277	0.01211013
25				1.0001009	1.083446	1.025898	-0.001525	0.08344602	0.02589755	0.00231952	0.05923143	0.00142354
50				0.998475	1.029632	1.01288	0.0001009	0.02963218	0.01288046	0.0006034	0.01262906	0.00033076
100				0.9993925	1.011358	1.006192	-0.00060747	0.01135806	0.00619171	0.00015999	0.00286179	0.00007367
10	0.5	1.5	0.3	0.512308	1.665364	0.3320027	0.01230797	0.16536399	0.03200274	0.00437321	0.21339478	0.00253306
25				0.5009781	1.54315	0.3136642	0.0009781	0.04315043	0.01366418	0.00016357	0.01999218	0.00040015
50				0.4994055	1.514653	0.3062541	-0.00059451	0.01465275	0.00625411	0.00003895	0.00415054	0.0000794
100				0.4999715	1.50672	0.3031697	-0.00002849	0.00671988	0.00316972	0.00001008	0.00096302	0.00001928
10	2	2.5	5	2.261357	2.749196	5.089284	0.26135687	0.249196	0.08928385	0.38544392	0.94610921	0.01703428
25				2.06239	2.581992	5.035644	0.06239016	0.08199194	0.03564439	0.03436831	0.17046899	0.0025882
50				2.019727	2.528633	5.017547	0.01972724	0.02863347	0.01754683	0.00866758	0.04744816	0.00061935
100				2.004312	2.506118	5.009298	0.00431215	0.00611774	0.00929776	0.00213653	0.01269985	0.00017706

من نتائج تقديرات طريقة المربّعات الصغرى التي عرضت في الجدول (2) القيم التقديرية للمعالم (α, λ, M) ،ومنه يتبيّن أنّ القيم التقديرية للمعلمتين (α,M) أقرب إليها من المعلمة (λ)

استعملنا أحجام عيّنات (10صغيرة ، 25-50 متوسّطة ، 100كبيرة) فكانت القيم التقديرية قريبة جدا من القيم الحقيقية المفترضة لها، ويزداد التقارب كلما زاد حجم العيّنة.

وبالنسبة للتجربة الأولى من القيم الافتراضية للمَعْلَمَاْت ($\alpha = 0.5 , \lambda = 2 , M = 1.5$) فكانت قيمة ($\alpha$) أقل تحيّزاً من المَعْلَمَاْت الاخرى تليها بفارق قليل المعلمة (λ) في حين تَمّيزت المعلمة (M) بوجود مقادير متحيزة اكبر نسبيا من المعلمتين الأُخريتين ، الا أنْ المَعْلَمَاْت جميها تقترب بشكل كبير من الصفر بازدياد حجم العيّنة ، أمّا بالنسبة إلى (MSE) كانت القيم التقديرية بالنسبة للمعلمتين (α, M) قريبة جدا من الصفر ولاسيمّا بزيادة حجم العيّنة تليها المعلمة (λ) وبفارق نسبي ملحوظ .

وبالنسبة للتجربة الثانية من القيم الافتراضية للمَعْلَمَاْت ($\alpha = 1 , \lambda = 0.5 , M = 3$) فكانت قيمة ($\alpha$) أقل تحيّزأمن المَعْلَمَاْت الاخرى تليها بفارق قليل المعلمة (λ) في حين تَمّيزت المعلمة (M) بوجود مقادير متحيزة اكبر نسبيا من المعلمتين الأُخريتين ، الا أنْ المَعْلَمَاْت جميعها تقترب بشكل كبير من الصفر بازدياد حجم العيّنة ، أمّا بالنسبة إلى (MSE) فكانت القيم التقديرية بالنسبة للمعلمتين (α, M) قريبة جدا من الصفر ولاسيمّا بزيادة حجم العيّنة تليها المعلمة (λ).

وبالنسبة للتجربة الثالثة من القيم الافتراضية للمَعْلَمَاْت ($\alpha = 1 , \lambda = 1 , M = 1$) فكانت قيمة ($\alpha$) أقل تحيّزاً من المَعْلَمَاْت الاخرى تليها بفارق قليل المعلمة (M) في حين تَمّيزت المعلمة (λ) بوجود مقادير متحيزة اكبر نسبيا من المعلمتين الأُخريتين ، الا أنْ جميع المَعْلَمَاْت تقترب بشكل كبير من الصفر بازدياد حجم العيّنة ، أمّا بالنسبة إلى (MSE) فكانت القيم التقديرية بالنسبة للمعلمتين (α, M) قريبة جدا من الصفر ولاسيمّا بزيادة حجم العيّنة تليها المعلمة (λ) .

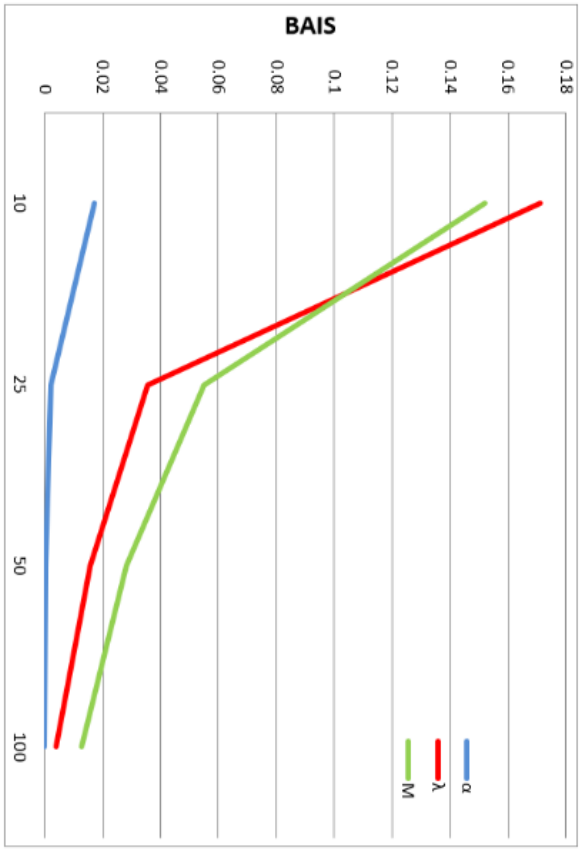
وبالنسبة للتجربة الرابعة من القيم الافتراضية للمَعْلَمَاْت ($\alpha = 0.5, \ \lambda = 1.5, \ M = 0.3$) فكانت قيمة ($\alpha$) أقل تحيّزاً من المَعْلَمَاْت الاخرى تليها بفارق قليل المعلمة (M) في حين تَمّيزت المعلمة (λ) بوجود مقادير متحيزة اكبر نسبيا من المعلمتين الأخرتين ، الا أنْ جميع المَعْلَمَاْت تقترب بشكل كبير من الصفر بازدياد حجم العيّنة ، أمّا بالنسبة إلى (MSE) فكانت القيم التقديرية بالنسبة للمعلمتين (M, α) قريبة جدا من الصفر ولاسيمّا بزيادة حجم العيّنة تليها المعلمة (λ) بفارق نسبي ملحوظ

وبالنسبة للتجربة الخامسة من القيم الافتراضية للمَعْلَمَاْت ($\alpha = 2, \ \lambda = 2.5, \ M = 5$) فكانت قيمة ($\alpha$) أقل تحيّزاً من المَعْلَمَاْت الاخرى تليها بفارق قليل المعلمة (M) تليها المعلمة (λ)، الا أنْ جميع المَعْلَمَاْت تقترب بشكل كبير من الصفر بازدياد حجم العيّنة ، أمّا بالنسبة إلى (MSE) فكانت القيم التقديرية بالنسبة للمعلمة (M) قريبة جدا من الصفر ولاسيمّا بزيادة حجم العيّنة تليها المعلمة (α) .

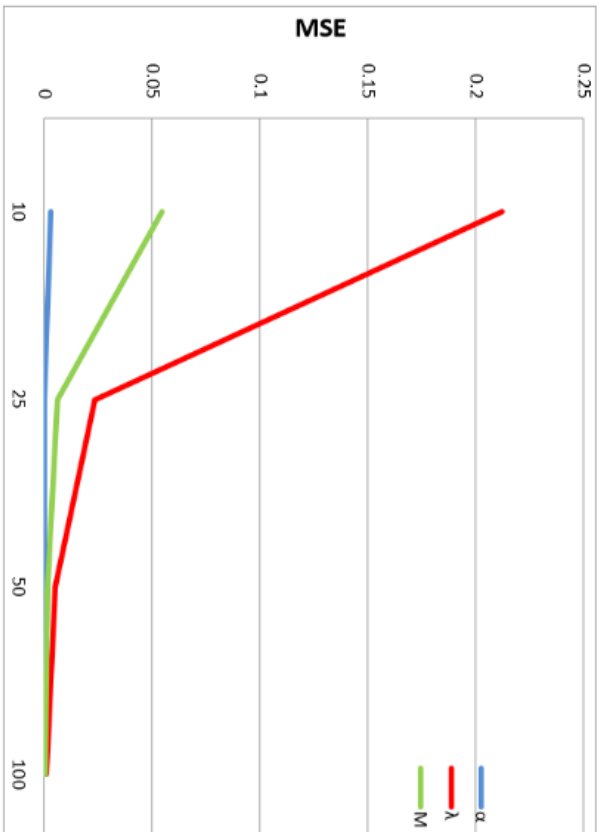
إنّ مقدار التحيّز للمعلمتين (α, M) كان صغير جدا لدرجة أنّه يقترب كثيرا من الصفر الا أنّ المعلمة (λ) تَمّيزتْ بمقادير للتحيّز أكبر نسبيا مقارنة بالمعلمتين (α, M).

أمّا بالنسبة إلى (MSE) فكانت القيم التقديرية بالنسبة للمعلمتين (α, M) أقل ما يمكن تليها المَعْلمة (λ).

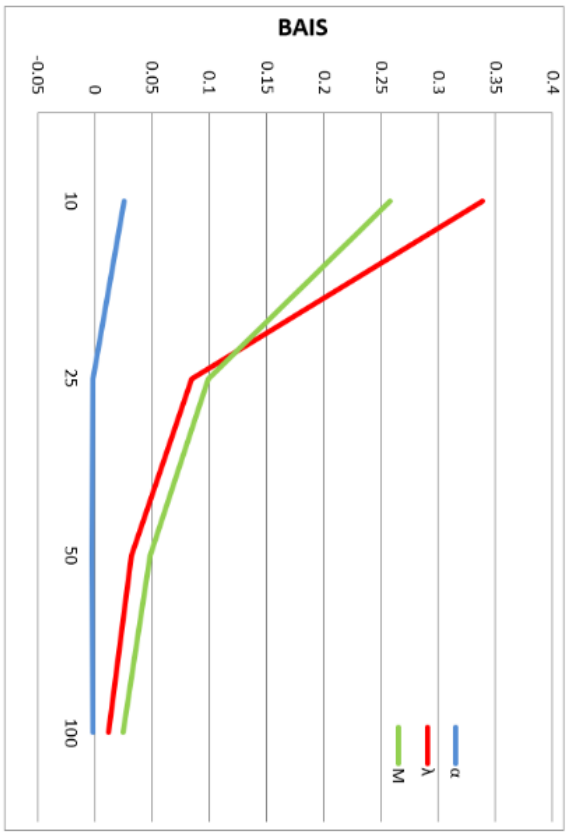
نلاحظ من خلال الرسوم التي سترد أنّ مقدّر المَعْلمة (α) هو أفضل مقدر لأنّه يقترب كثيرا من الصفر ويمتلك أفضل (MSE) يليه مقدّر المَعْلمة (M)



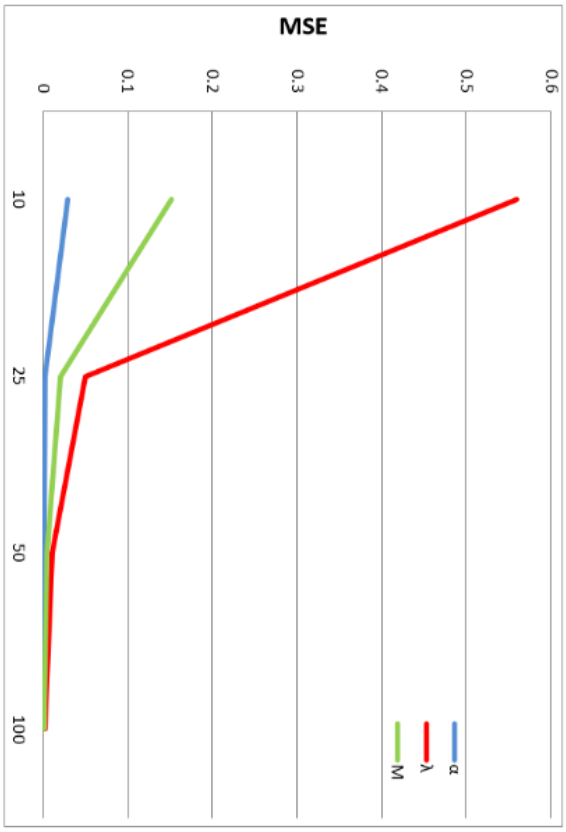
الشكل (13) يوضّح تغيّر قيم BIAS عندما (M=1.5 ,λ=2, α=0.5)



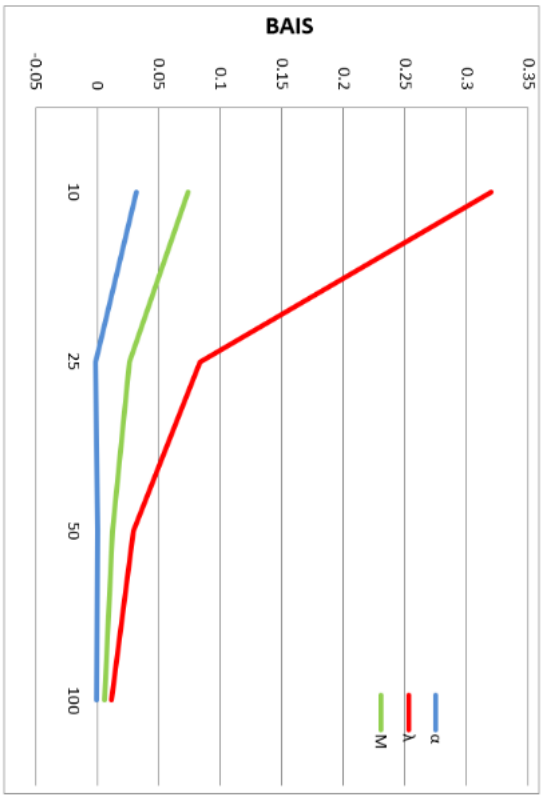
الشكل (14) يوضّح تغيّر قيم MSE عندما (M=1.5 ,λ=2, α=0.5)



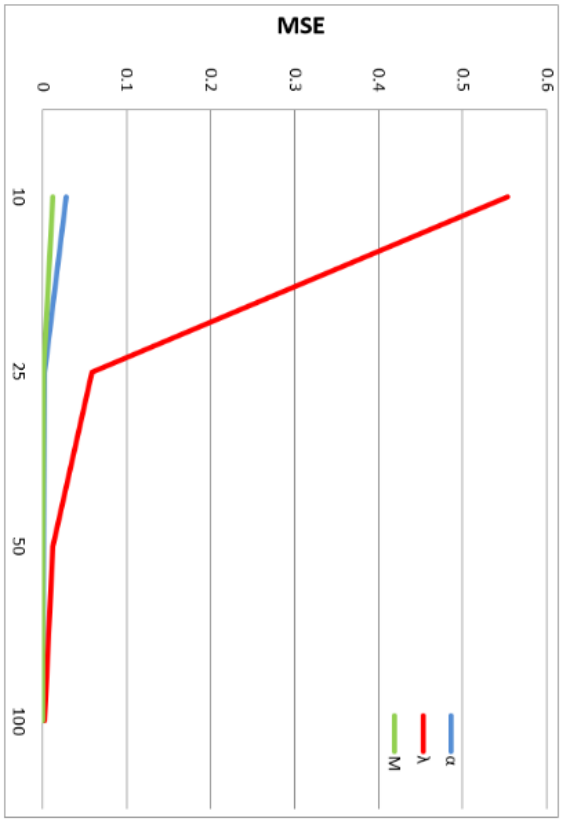
الشكل (15) يوضّح تغّير قيم BIAS عندما (M=1.5 ,λ=2, α=0.5)



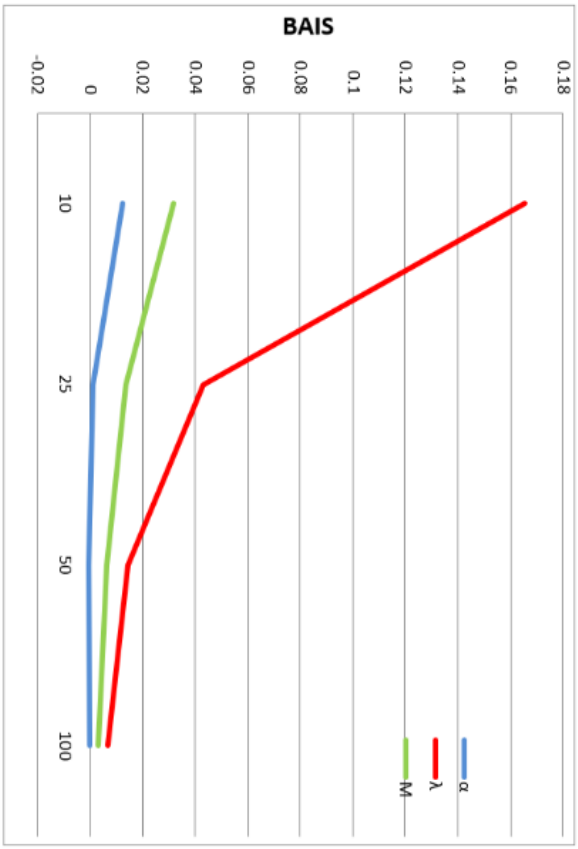
الشكل (16) يوضّح تغّير قيم MSE عندما(M=3 ,λ=0.5, α=1)



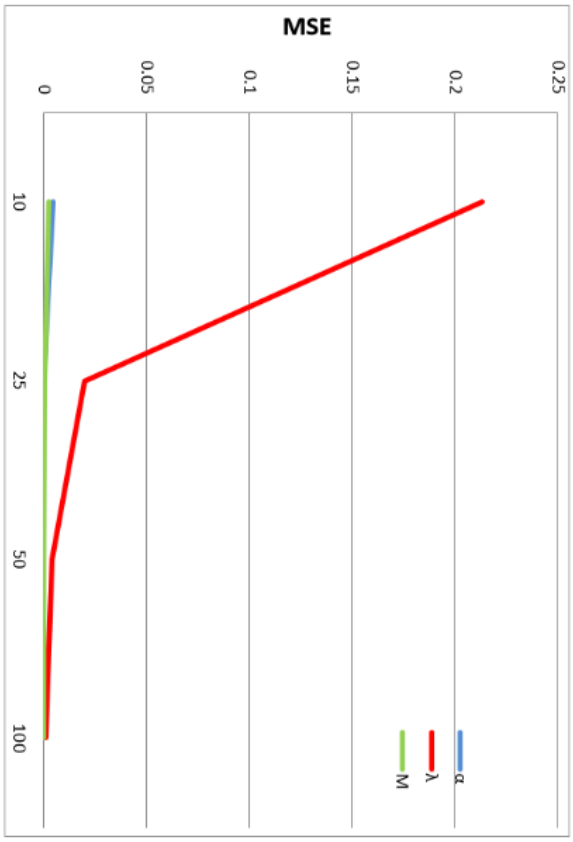
الشكل (17) يوضّح تغّير BIAS عندما (M=1 ,λ=1, α=1)



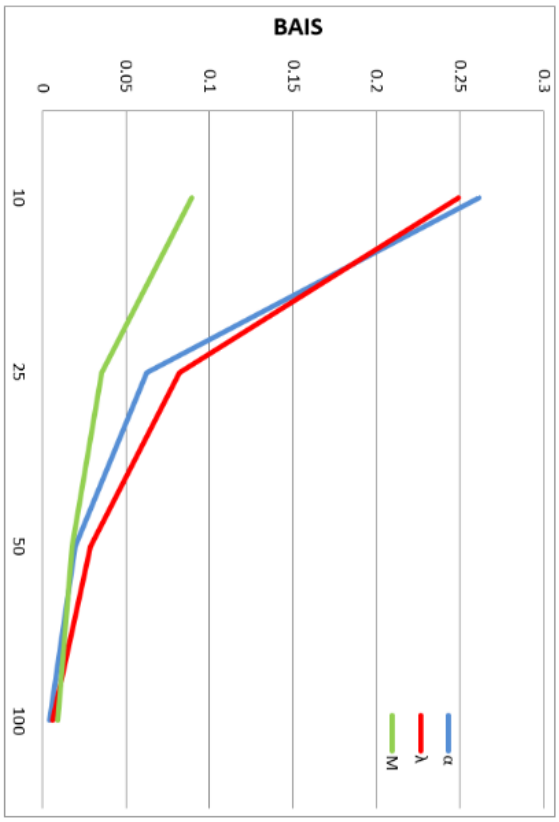
الشكل (18) يوضّح تغّير قيم MSE عندما(M=1 ,λ=1, α=1)



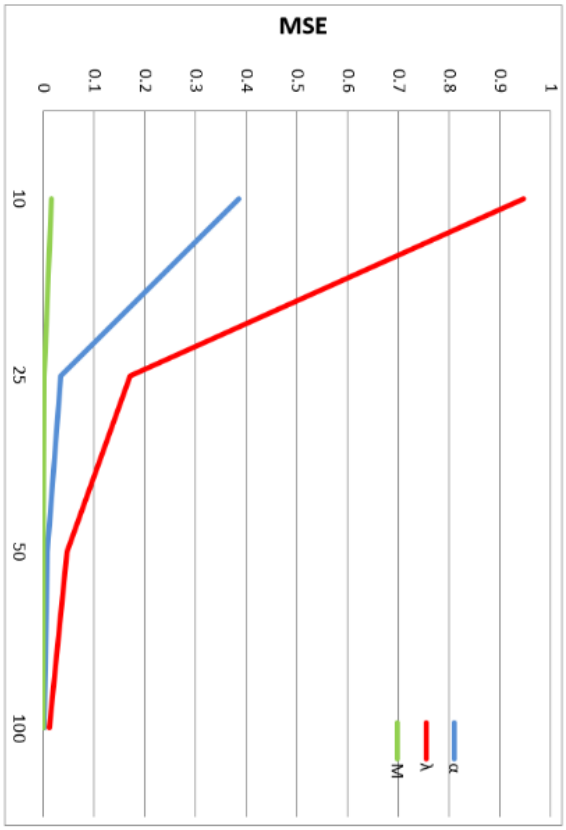
الشكل (19) يوضّح تغّير قيم BIAS عندما (M=0.3 ,λ=1.5, α=0.5)



الشكل (20) يوضّح تغّير قيم MSE عندما(M=0.3 ,λ=1.5, α=0.5)



الشكل (21) يوضّح تغّير قيم BIAS عندما (M=5 ,λ=2.5, α=2)



الشكل (22) يوضّح تغّير قيم MSE عندما (M=5 ,λ=2.5, α=2)

الاستنتاجات:

تَمّ التوصل إلى أهّم الاستنتاجات الآتية:

1- أثبتتْ الطريقة المعتمدة على النسب المئوية كفاءتها في تقدير معالم النموذج المقترح ، وهي أفضل من طريقة المربّعات الصغرى لأنها تعطينا متوسّط مربعات الخطأ بأقلّ ما يمكن.
2- إنّ متوسّط مربعات الخطأ (MSE) والتحيّز (BIAS) يتناقص بزيادة حجم العيّنة في تجارب المحاكاة كلها.
3- القيم الأفتراضية تكون متقاربة مع القيم الحقيقية لطريقتي التقدير (طريقة المربّعات الصغرى والطريقة المعتَمّدة على النسب المئوية) ولاسيمّا عند حجم العيّنة (*50-100*)
4- اظهرت طرائق التقدير تقديرات يمكن الوثوق بها، وعلى مستوى أحجام العيّنات الصغيرة، والمتوسّطة، والكبيرة.
5- مقدر المعلمة (α) هو أفضل مُقدّر ،لأنه يقترب كثيرا من الصفر ويمتلك أفضل (*MSE*)

المصادر:

[3] Abouammoh,A.M and A.M. Alshingiti, (2009). Reliability estimation of generalized inverted exponential distribution. J.Stat. Comput.Simul., 79:1301-1315

[5] Ayman Orabi & Dalia Ziedan , (2021). Robust Estimators for Marshal-Olkin Extended Linear Exponential Distribution. International Journal of Statistics and Applications, 11(1): 12-18.

[4] G*Ü*NEY, Y., & Arslan, O. (2017). Robust parameter estimation for the Marshall-Olkin extended BURR XII distribution. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 66(2), 141-161.

[2] L. J. Norman, K. Samuel, and N. Balakrishnan,(1994), Continuous Univariate Distributions, Volume 1, second Edition, Wiley.

[6] M.H. Tahir , M. Adnan Hussain, Gauss M Cordeiro, G.G. Hamedani , M. Mansoor , M. Zubair."The Gambel-Lomax Distribution"., Journal of Statistical Theory andApplications (2016), Vol.15.No.1, p 61-79

[1] Ramos,M.Marinho,P.Cardeio,G.and Homedani,Gh.(2015**)."The Kumaraswamy-G Poisson Family of Distributions"**. Journal of statistical theory and applications, Vol 14,No. 3.222-239.