AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

Comparison between least squares and percentile methods in estimating Rayleigh Kumaraswamy distribution, a simulation study

Noor Bashar Abbas[1] **Abbas Lafta Kneehr**[2]

noorabbas523@uowasit.edu.iq alafta@uowasit.edu.iq

College of Administration and Economic ,Wasit University, Iraq

الخلاصة:

في هذا البحث تَمّ تقديم تعميم جديد لتوزيع رايلي، سُمّيَ بتوزيع رايلي كوماراسوامي ، وقد تَمّ اشتقاق الصيغ الموسّعة لدالّة الكثافة الاحتمالية pdf ، وكذلك تَمّ اشتقاق بعضاً من خصائص التوزيع كالعزوم والتباين. ايضاً تَمّتْ مقارنة بين طريقة المربّعات الصغرى، وطريقة النسب المئوية لتقدير معالم الأنموذج، وإجراء دراسة محاكاة باستعمال أحجام عيّنات مختلفة، وقيم افتراضية مختلفة لمعالم الأنموذج .وقد تبيّنَ من دراسة المحاكاة مدى دقّة طريقة المربّعات الصغرى في تقدير النموذج، وذلك من خلال معياري التحيّز، وأقلّ متوسّط مربّعات للخطأ.

Abstract

In this research, a new generalization of the Rayleigh distribution called the Rayleigh-Kumaraswamy distribution was introduced. The extended formulas for the probability density function (PDF) and cumulative distribution function (CDF) were derived. Furthermore, some uses of distribution properties such as moments and moments generating function were also derived. The PDF property of the distribution was preserved. Additionally, A simulation study was conducted using different sample sizes and various assume .Two different methods for estimating the parameters of the new distribution are presented: the least squares method, and the method based on percentiles. Simulation studies are conducted to compare the performance of these estimation methods using different sample sizes and assumed parameter values. The comparison is based on statistical criteria such as mean square error and bias. The results indicate that the least squares method performs the best.

Keywords: Rayleigh distribution; Probability density function (PDF); Cumulative distribution function (CDF); least squares method.

1- المُقدّمة : (Introduction)

من بين التوزيعات الاحتمالية ، يُعدُّ توزيع رايلي أحد التوزيعات الأكثر استعمالا، وهو التوزيع الذي قدّمه Rayleigh في عام 1880 ، بوصفه حالة خاصّة لتوزيع Weibull؛ لأنّه يلعب دورا رئيسا في: نمذجة البيانات وتحليلها، وفي التكنولوجيا، والتصوير التشخيصي، والإحصاءات التطبيقية (Al-Noor, N. H., & Assi, N. K., 2020). يمتلك توزيع رايلي دالّة الكثافة الاحتمالية (pdf).

$$h(x;\alpha)=\frac{x}{\alpha^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) \qquad x>0 \ ، \ \alpha>0 \quad (1)$$

دالّة التوزيع التراكمية (cdf) لتوزيع رايلي تكون بالشكل الآتي:

$$H(x:\alpha)=1-\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) \quad ; \qquad 0<x<\infty \qquad (2)$$

قدّمَ الباحث (Siddiqui, M. M. 1962) أصل هذا التوزيع، وبعض من خصائصه المهمّة؛ وذلك لأنّ له خصائص عدّة مرغوبة وتفسيرات فيزيائية مهمّة. لكن من مساوئ التوزيع له معدّل فشل متزايد، ومن ثَمّ فإنّ العديد من الباحثين مهتمّون بتحديد عائلات معمّمة جديدة لتوزيعات رايلي، توفّر بدورها مرونة أكبر في نمذجة البيانات وتحليلها. أيْ إنّ التوزيعات المُعمّمة تعطي مزيدا من المرونة للأنموذج الأصلي، وذلك من خلال إضافة مَعْلَمَات جديدة إلى التوزيع الأصلي، بوصفها طريقة فعّالة للحصول على توزيعات جديدة أكثر مرونة.

قدّمَ الباحث (Kumaraswamy, P. 1980) تعميماً لتوزيع *Beta* ، وقد تميّز التوزيع الجديد بكونه أفضل بكثير من توزيع *Beta*؛ لأنّه يمتلك دالّة توزيع محدّدة عكس توزيع *Beta* ، بوصفها عائلة جديدة من التوزيعات، تتجلّى أهمّيتها بكونها توفّر المرونة اللازمة في التعامل مع البيانات مقارنة بالأنموذج الأصلي.

سوف يُتمّ هنا تقديم شكل مُعمّم لتوزيع رايلي بواسطة استبدال المتغيّر *x* لأيّ توزيع مستمرّ آخر ب $\left(\frac{G(x;\delta)}{\bar{G}(x;\delta)}\right)^{\beta}$ في صيغه (*cdf*). (AHMAD, H.,et al., 2021) ، إذْ δ تُمثّل موجّه المعالم.

توزيع خطّ الأساس باستعمال G، ودالّة المعولية $\bar{G} = 1 - G$ باستعمال توزيع أساس مناسب، نقوم بتحسين التوزيع الأصلي، وجعله أكثر مرونة وموثوقية.

كحالة خاصّة لطريقة التعميم هذه، في عام (2014) قدّم الباحث (Bourguignon ,et, al.) عائلة جديدة من التوزيعات أحادية المتغيّر بمَعْلَمَتين إضافيتين، باستعمال تطبيق دالّة التوليد ل Weibull المُطبّق على نسبة الأرجحية $\frac{G(x)}{1-G(x)}$. وفي عام (2013) قدّم الباحث (Lee ,et al.) وبدون فقدان للعمومية ، وبفرض أنّ $\beta = 1$ ومن ثَمَّ فإن cdf لتعميم رايلي الجديد:

$$F_{RG}(x;\alpha,\delta) = \int_0^{\frac{G(x;\delta)}{\bar{G}(x;\delta)}} \frac{t}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) dt$$

$$= 1 - \exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{G(x;\delta)}{\bar{G}(x;\delta)}\right)^2\right] \qquad (3)$$

ومنه يُتمّ الحصول على دالّة pdf لهذا التعميم الجديد:

$$f_{RG}(x;\alpha,\delta) = \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{G(x;\delta)}{\bar{G}^3(x;\delta)}\, g(x;\delta)\, \exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{G(x;\delta)}{\bar{G}(x;\delta)}\right)^2\right] \qquad (4)$$

$g(x;\delta)$ هو دالّة pdf لتوزيع خطّ الأساس، يمكن أنْ تكون المعادلة (4) أكثر قابلية للتتبّع عندما $G(x;\delta)$ و $g(x;\delta)$ لها صيغ تحليلية بسيطة. علماً أنّ

$$X \sim RG(\alpha,\delta)$$

2- مشكلة البحث : Research Problem

نتيجة للتزايد الكبير في البيانات، فإنّ ذلك يتطلّب إيجاد توزيعات مَعْلَمَيّة جديدة، تُمكّننا من وصف أفضل للظواهر أو التجارب المدروسة، لذلك فإنّ تقديم مثل هكذا توزيعات يكون من الأهمّية في التعامل مع المشكلات الإحصائية عندما يرغب الباحث في تحصيل دقّة أكبر لسلوكيات تلك البيانات في المستقبل مبيّنة على التوزيعات المتوافرة.

3- هدف البحث : (The Aim)

1. تهدف الرسالة إلى تقديم توزيع جديد مبنيٍّ على توزيع رايلي، واشتقاق بعضاً من خصائص هذا التوزيع.
2. تقديم طرائق مختلفة لتقدير مَعْلَمَات التوزيع، ثُمّ المقارنة بينها باستعمال متوسّط مربّعات الخطأ MSE ومعامل التحيّز.

4- توزيع رايلي كوماراسوامي: (Rayleigh-Kumaraswamy distribution):

توزيع Kumaraswamy هو عائلة من التوزيعات الاحتمالية المستمرّة ، بمَعْلَمَتي المعرفة في الفاصل الزمني (0,1) ، اقترح الباحث (Jones, M. C. 2009) توزيع (Kum(a,b مشابه لتوزيع بيتا، إذ يمكن أنْ يكون أحادي النمط، أحادي الشكل متناقصاً أو متزايداً أو ثابتا، وله ميزة على توزيع بيتا على أنّه لا يتضمّن أيّ دالّة خاصّة، مثل توزيع Beta ودالّة التوزيع التراكمي لها شكل مغلق بسيط. أيْ يرتبط توزيع كوماراسوامي ارتباطاً وثيقاً بتوزيع بيتا، وكما يمتاز توزيع كوماراسوامي بمرونه أكثر في التطبيقات العملية.

دالّة كثافة الاحتمال، ودالّة التوزيع التراكمي لتوزيع كوماراسوامي تعطى بالصيغ الآتية على التوالي :

$$g(x;a,b) = ab\, x^{a-1}\,(1-x^{a})^{b-1} \;, \quad 0< x<1 \qquad (5)$$

$$G(x;a,b) = 1-(1-x^{a})^{b} \qquad (6)$$

$$\bar{G}(x;a,b) = 1-[1-(1-x^{a})^{b}] \qquad (7)$$

إذْ إنّ a,b >0 مَعْلَمَات الشكل

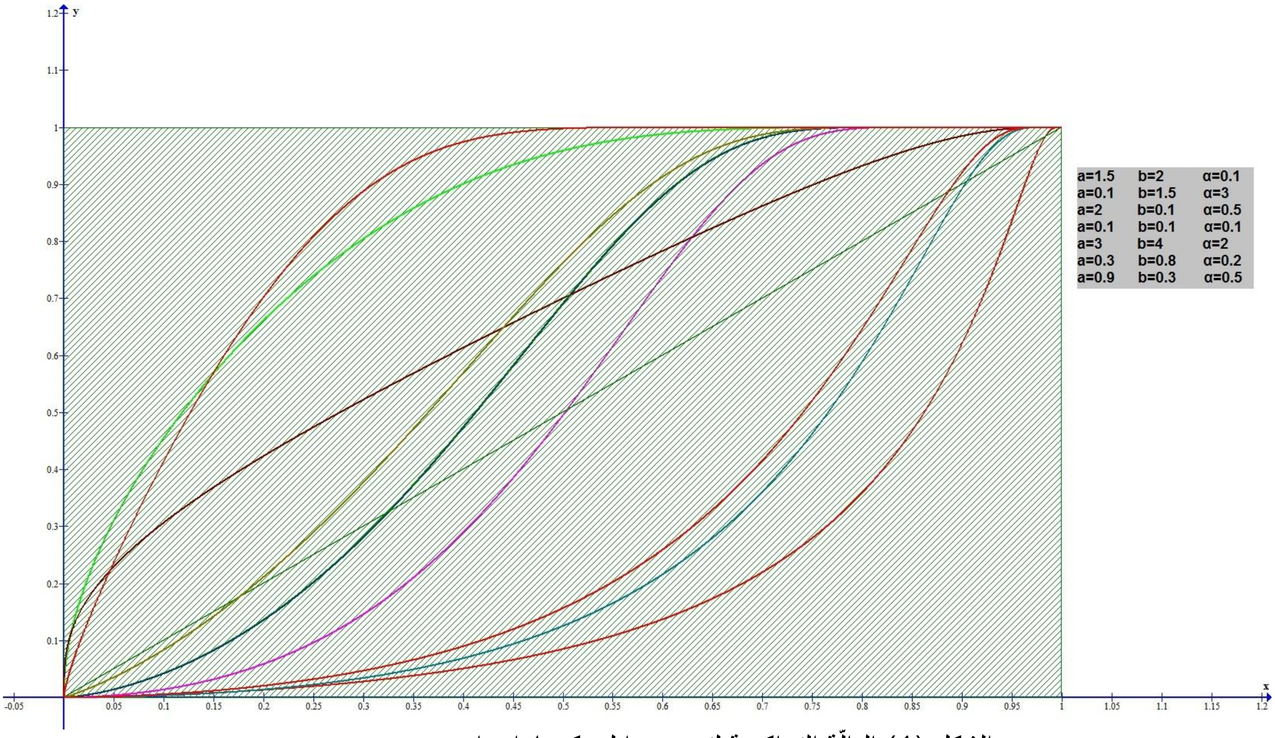
الدوال $g(x{:}\,a,b$) و $G(x{:}\,a,b)$ المعرّفة في المعادلتين (6) و(5)، وتعوضيهما في المعادلة (4) نحصل على دالّة كثافة توزيع رايلي كوماراسوامي (RK).

$$f_{RK}(x;\ \alpha,a,b) = \frac{ab}{\alpha^2}\, x^{a-1}\left[(1-x^{a})^{-2b-1}-(1-x^{a}\,)^{-b-1}\right] exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\,((1-x^{a})^{-b}-1)^2\right], 0<x<1 \qquad (8)$$

المَعْلَمَات $\alpha > 0$ و $b > 0$ و $a > 0$

وبتعويض المعادلتين (6) و (7) في المعادلة (3) نحصل على دالّة التوزيع التراكمية لتوزيع RK :

$$F_{RK}(x;\alpha,a,b) = 1-exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}((1-x^{a})^{-b}-1)^2\right] \qquad (9)$$



الشكل (1) الدالّة التراكمية لتوزيع رايلي كوماراسوامي

5- التعبير عن توزيع رايلي كوماراسوامي بالشكل الموسّع:

باستعمال بعض تقنيات توسيع المتسلسلات، مثل توسعة ثنائي الحدين (*binomial*)، ومتسلسلة القوى (تايلور) نحصل على:

$$f(x;\alpha,a,b) = \mathrm{ab}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i,k=0}^{\infty} pijk \sum_{d=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{d+m+l}\, c_d^{b-1}\, c_m^{t}\, c_l^{mb}\;\; x^{a+ad+al-1} \quad (10)$$

المعادلة (3) تُمثّل الشكل الموسّع لتوزيع رايلي كوماراسوامي، وسيتُمَّ استعمال هذه الصيغة في ايجاد الخصائص التوزيع المهمّة مثل العزوم.

6- العزوم : (Moments)

من المقاييس المهمّة في علم الإحصاء والرياضيات والفيزياء والعلوم الأخرى، ويستعمل في حساب خصائص إحصائية عدّة منها: المتوسّط، الانحراف المعياري، والتباين، والالتواء والتفرطح (Mood, A. M. et al., 1974)

إنّ العزم اللامركزي حول نقطة الأصل يرمز له برمز $\mathrm{M}_{\mathrm{r}}' = E(x^r)$

إذْ إنّ $\mathrm{M}'_{\mathrm{r}} = \mathrm{E}x^r = \int_0^1 x^r\, f(x)dx \qquad r = 1,2,3, \ldots$

وبتعويض دالّة الكثافة الاحتمال لتوزيع رايلي كوماراسوامي كما في المعادلة (2-14) في صيغة العزوم المذكور آنفًا

$$E(X^r) = \int_0^1 x^r f_{RG}\,(x, \alpha, a, b)dx$$

$$= \mathrm{ab}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i,k=0}^{\infty} pijk \sum_{d=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{d+m+l}\, c_d^{b-1}\, c_m^t\, c_l^{mb} \int_0^1 x^r\, x^{a+ad+al-1}\, dx$$

$$= \mathrm{ab}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i,k=0}^{\infty} pijk \sum_{d=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{d+m+l}\, c_d^{b-1}\, c_m^t\, c_l^{mb} \int_0^1 x^{r+a+ad+al-1}\, dx$$

$$= \mathrm{ab}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i,k=0}^{\infty} pijk \sum_{d=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{d+m+l}\, c_d^{b-1}\, c_m^t\, c_l^{mb} \left[\frac{x^{r+a+ad+al}}{r+a+ad+al}\right]_0^1$$

$$= \mathrm{ab}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i,k=0}^{\infty} pijk \sum_{d=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{d+m+l}\, c_d^{b-1}\, c_m^t\, c_l^{mb} \left[\frac{1}{r+a+ad+al}\right]$$

$E(x^r)$

(11)

بالاعتماد على المعادلة (11) لإيجاد كُلّ عزم من العزوم الخاصّة بالتوزيع

بفرض أنّ

$$\mathrm{A} = ab\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i,k=0}^{\infty} pijk \sum_{d=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{d+m+l}\, c_d^{b-1}\, c_m^t\, c_l^{mb}$$

$$E(x^r) = \mathrm{A}\left[\frac{1}{r+a(1+d+l)}\right]$$

متوسّط التوزيع يمكن الحصول عليه بعد تعويض *r=1*

$$E(X^1) = \mathrm{A}\left[\frac{1}{1+a(1+d+l)}\right]$$

ونحصل على $\mathrm{E}x^2$ عندما *r=2* وكالآتي :

$$E(X^2) = A\left[\frac{1}{2+a(1+d+l)}\right]$$

ومنها نحصل على تباين التوزيع وفق الصيغة الآتية :

$$V(x) = E(x^2) - (Ex)^2$$

$$V(x) = \left[\frac{A}{2 + a(1 + d + l)}\right] - \left[\frac{A^2}{\left(1 + a(1 + d + l)\right)^2}\right]$$

7- طريقة المربّعات الصغرى : (Least squares method)

هي من الطرائق الكلاسيكية المهمّة؛ كونها تُمثّل طريقة إحصائية تهدف إلى تقليل مجموع مربّعات الفروق بين القيم الفعلية والمقدّرة، ويتُمّ فيها إيجاد القيم المقدّرات للتوزيع الاحتمالي، والتي تجعل مقدار الخطأ المحسوب أصغر ما يمكن .(GÜNEY,Y.,& Arslan,O.,2017)

$$S(a, b, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{F}(xi) - F(xi)\right)^2 \qquad (12)$$

$$\hat{F}(x_{1i}) = p_{1i} \qquad (13)$$

إذْ إنّ

$$p_{1i} = \frac{i - 0.5}{n} \qquad i = 1,2, \dots, n \qquad (14)$$

$F(xi)$: تُمثّل دالّة التوزيع التجميعية cdf للتوزيع رايلي كوماراسوامي :

$$F(xi) = 1 - exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left((1 - x^a)^{-b} - 1\right)^2\right]$$

إنّ دالّة cdf لتوزيع رايلي كوماراسوامي غير خطّية، سيكون من الصعب تقدير المعادلة لهذا السبب استعملنا المعادلة (12) تحويلها إلى معادلة خطّية

$$\text{S} = \frac{1}{1 - F(xi)}$$

لمّا كانت الصيغة معقّدة، ويصعب تحويلها إلى معادلة خطّية؛ لذلك سيتُمّ أخذ الـ log المضاعف؛ لتقليل درجة المعادلة وعلى النحو الآتي:

$$-\log\log\left(1 - F(xi)\right)$$

$$F(xi) = 1 - exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left((1 - x^a)^{-b} - 1\right)^2\right]$$

$$(1 - F(xi)) = exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left((1 - x^a)^{-b} - 1\right)^2\right]$$

$$-\log\ \log\big(1-F(xi)\big) = -\log\left[-\frac{((1-x^{a})^{-b}-1)^{2}}{2\alpha^{2}}\ \right] \quad (15)$$

وبالتعويض المعادلة (15) في المعادلة (12) نحصل على:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[\widehat{P\iota}+\log\left[-\frac{\left((1-x^{a})^{-b}-1\right)^{2}}{2\alpha^{2}}\ \right]\right]^{2} \qquad (16)$$

وبأخذ الاشتقاق الجزئي للمعادلة (16) بالنسبة للمَعْلَمَة a ومساواتها للصفر نحصل على :

$$\frac{\partial S}{\partial a}=2\sum_{i=1}^{n}\left[\widehat{P\iota}+\log\left[-\frac{\left((1-x^{a})^{-b}-1\right)^{2}}{2\alpha^{2}}\ \right]\right]\left[\ \frac{2b\ x^{a}\log x}{(x^{a}-1)((1-x^{a})^{b}-1)}\ \right]$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\widehat{P\iota}+\log\left[-\frac{\left((1-x^{a})^{-b}-1\right)^{2}}{2\alpha^{2}}\ \right]\right]\ \left[\ \frac{b\ x^{a}\log x}{(x^{a}-1)((1-x^{a})^{b}-1)}\ \right]=0 \qquad (17)$$

أمّا الاشتقاق الجزئي بالنسبة للمَعْلَمَة b ومساواتها للصفر نحصل على

$$\frac{\partial S}{\partial b}=\ 2\sum_{i=1}^{n}\left[\widehat{P\iota}+\log\left[-\frac{\left((1-x^{a})^{-b}-1\right)^{2}}{2\alpha^{2}}\ \right]\right]\left[\frac{2\log(1-x^{a})}{(1-x^{a})^{b}-1}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\widehat{P\iota}+\log\left[-\frac{\left((1-x^{a})^{-b}-1\right)^{2}}{2\alpha^{2}}\ \right]\right]\left[\frac{\log(1-x^{a})}{(1-x^{a})^{b}-1}\right]\ =0 \qquad (18)$$

والاشتقاق الجزئي بالنسبة للمَعْلَمَة α ومساواتها للصفر نحصل على

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha}=2\sum_{i=1}^{n}\left[\widehat{P\iota}+\log\left[-\frac{\left((1-x^{a})^{-b}-1\right)^{2}}{2\alpha^{2}}\ \right]\right]\left[-\frac{2}{\alpha}\right]$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\left[\widehat{Pi}+\log\left[-\frac{((1-x^{a})^{-b}-1)^{2}}{2\alpha^{2}}\ \right]\right]\left[-\frac{2}{\alpha}\right]\ =0 \qquad (19)$$

المعادلات (19)،(18)،(17) معادلات غير خطّية، تُحلّ باستعمال إحدى الطرائق العددية، التي تستعمل لحلّ المعادلات الرياضية غير الخطّية مثل طريقة (نيوتن – رافسون) للحصول على مقدّر المَعْلَمَات ($\hat{a}$ و $\hat{b}$ و $\hat{\alpha}$).

8- الطريقة المعتمدة على النسب المئوية): Method Based on (Percentiles

في عام 1996 اقترح الباحثان (Hyndman and Fan) ، طريقة لتقدير معالم التوزيعات، وذلك باستعمال مفهوم النسب المئوية للتوزيعات، ويكون ذلك من خلال مساواة دالّة التوزيع التراكمية إلى النسبة المئوية pi. (Orabi, A., & Ziedan, D.,2021)

$$p_i = 1 - exp\left[-\frac{((1-x^a)^{-b}-1)^2}{2\alpha^2}\right] \qquad (20)$$

بترتيب الحدود وأخذ log للطرفين نحصل

$$\log(1-p_i) = \left[-\frac{((1-x^a)^{-b}-1)^2}{2\alpha^2}\right]$$

$$-\log(1-p_i)\,(2\alpha^2) = ((1-x^a)^{-b}-1)^2$$

$$-\log(1-p_i)\,(2\alpha^2) = ((1-x^a)^{-b}-1)^2$$

$$\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)} = (1-x^a)^{-b}-1$$

$$\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)} + 1 = (1-x^a)^{-b}$$

$$\left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)} + 1\right]^{-\frac{1}{b}} = (1-x^a)$$

$$x^a = 1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)} + 1\right]^{-\frac{1}{b}}$$

$$x_{pi} = \left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)} + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}^{\frac{1}{a}} \qquad (21)$$

وعندما

$$x_i = m_{pi}(a,b,\alpha) + u_i$$

إذْ إنّ (x_i) يمثّل دالّة بدلالة المَعْلَمَات (a,b,α)

أمّا u_i يمثّل حد الخطأ

ويمكن الحصول على حدّ الخطأ (u_i) كالآتي

$$u_i = x_i - m_{pi}(a,b,\alpha)$$

ولمّا كان مجموع الأخطاء يساوي صفر؛ لذلك سنعمل على إيجاد مجموع مربّعات انحرافات القيم

$$Q_i = \sum_{i=1}^{n} {u_i}^2$$

إذْ إنّ (Q_i) تُمثّل مجموع مربّعات حدّ الخطأ

$$Q(a,b,\alpha\ ) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}^{\frac{1}{a}}\right)^2 \qquad (22)$$

وبأخذ المشتقّات الجزئية لكُلّ $(a\ , b, \alpha)$ على التوالي نحصل على:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}^{\frac{1}{a}}\right)(-1)\left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}^{\frac{1}{a}}$$

$$log\left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}\left(-\frac{1}{a^2}\right)$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}^{\frac{1}{a}}\right)\left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}^{\frac{1}{a}} log\left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}\left(\frac{1}{a^2}\right) = 0 \qquad (23)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}^{\frac{1}{a}}\right)(-1)\left[\frac{1}{a}\left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}^{\frac{1}{a}-1}(-1)\left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\ log\left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]\frac{1}{b^2}\right]$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}^{\frac{1}{a}}\right)\left[\frac{1}{a}\left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}^{\frac{1}{a}-1}\left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\ log\left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)}\ + 1\right]\ \frac{1}{b^2}\right] = 0 \qquad (24)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)} + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}^{\frac{1}{a}}\right)(-1)\ \frac{1}{a}\left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)} + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}^{\frac{1}{a}-1}(-1)(-\frac{1}{b})\left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)} + 1\right]^{-\frac{1}{b}-1}\left[\sqrt{-2\log(1-p_i)}\right]$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)} + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}^{\frac{1}{a}}\right)\frac{1}{a}\left\{1 - \left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)} + 1\right]^{-\frac{1}{b}}\right\}^{\frac{1}{a}-1}\frac{1}{b}\left[\alpha\sqrt{-2\log(1-p_i)} + 1\right]^{-\frac{1}{b}-1}\left[\sqrt{-2\log(1-p_i)}\right] = 0 \qquad (25)$$

ولمّا كانت المعادلات المذكورة آنفًا غير خطّية، تُحَلّ بإحدى طرائق العددية (نيوتن-رافسون)

9- المحاكاة :

لتقييم أداء طريقة المربّعات الصغرى والنسب المئوية تَمّ إجراء دراسة المحاكاة، إذْ إنّ عدد تجارب المحاكاة بلغ (5) تجارب لكُلّ مَعْلَمَة من مَعْلَمَات التوزيع. للأحجام عيّنات مختلفة: (100، 50، 20، n=10) ،القيم الافتراضية للمَعْلَمَة الأولى (2 ،0.1، 0.5، 3، α=0.1) والقيم الافتراضية للمَعْلَمَة الثانية (3، 0.1، 2، 0.1، a=1.5) والقيم الافتراضية للمَعْلَمَة الثالثة (4، 0.1، 0.1، 1.5، b=2) ولمعرفة كفاءة طريقة التقدير، وذلك باستعمال معيار (Mean Square Error) .

نتائج الطريقة المعتمدة على النسب المئوية عُرضتْ في الجدول (1) ومن ملاحظة الجدول يتبيّنَ منه أنّ قيم التقديرات للمَعْلَمَات جميعها قد قاربت بشكل كبير القيمة الافتراضية للمَعْلَمَة ولا سيّما عند زيادة حجم العيّنة، الأمر الذي يعني أنّ طريقة النسب المئوية وفّرتْ تقديرات جيدة لمَعْلَمَات التوزيع يمكن الاعتماد عليها.

لجدول (1) القيم التقديرية للمعالم (α ,a, b) باستعمال طريقة Percentiles

n	PARAMETAR			ESTIMATOR			BIAS			MSE		
	α	a	b	$\hat{\alpha}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
10	0.1	1.5	2	0.1005174	1.503945	2.01265	0.00051735	0.00394452	0.01265023	0.00002684	0.00116687	0.01647584
20				0.1001313	1.500664	2.003028	0.0001313	0.00066419	0.00302831	0.00000711	0.00025793	0.00451402
50				0.1000213	1.500105	2.000444	0.00002128	0.00010538	0.00044356	0.00000121	0.00003604	0.00077211
100				0.0999943	1.500002	1.999829	-0.00000575	0.00000197	-0.0001714	0.00000031	0.0000086	0.00019538
10	3	0.1	1.5	3.085746	0.1065091	1.57311	0.08574582	0.00650907	7.31E-02	0.03944999	0.00017332	0.01938286
20				3.024617	0.1020086	1.524605	0.02461668	0.00200856	2.46E-02	0.00570393	0.0000249	0.00316668
50				3.005644	0.1005235	1.507184	0.00564406	0.00052354	7.18E-03	0.00073374	0.00000317	0.00042555
100				3.000258	0.1001235	1.502209	0.00025788	0.00012348	2.21E-03	0.00017443	0.0000007	0.00009813
10	0.5	2	0.1	0.5729738	2.359234	0.1165886	0.07297376	0.35923368	1.66E-02	8.78E-03	2.31E-01	4.50E-04
20				0.5230996	2.096613	0.1051384	0.0230996	0.09661348	5.14E-03	1.16E-03	2.85E-02	5.75E-05
50				0.5038933	2.012927	0.1008657	0.00389329	0.01292699	8.66E-04	1.21E-04	2.82E-03	5.89E-06
100				0.5002638	2.000351	0.1000623	0.00026377	0.0003515	6.23E-05	2.66E-05	5.36E-04	1.28E-06
10	0.1	0.1	0.1	0.1003146	0.1003528	0.1003441	0.0003146	0.00035281	3.44E-04	3.90E-07	6.00E-07	4.60E-07
20				0.1000954	0.1000915	0.1001067	0.0000954	0.00009146	1.07E-04	5.00E-08	8.00E-08	6.00E-08
50				0.1000293	0.10002	0.1000337	0.00002927	0.00002002	3.37E-05	1.00E-08	1.00E-08	1.00E-08
100				0.1000097	0.1000028	0.100012	0.00000972	0.00000279	1.20E-05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
10	2	3	4	1.947056	2.923107	3.885184	-0.05294357	-0.07689317	-1.15E-01	4.73E-02	2.51E-01	9.79E-01
20				1.960361	2.932613	3.932341	-0.03963924	-0.06738719	-6.77E-02	2.02E-02	6.37E-02	2.71E-01
50				1.988154	2.966172	3.936534	-0.01184598	-0.03382804	-6.35E-02	6.34E-03	1.04E-02	4.91E-02
100				1.992407	2.9807	3.965684	-0.00759342	-0.01929966	-3.43E-02	1.88E-03	2.67E-03	1.31E-02

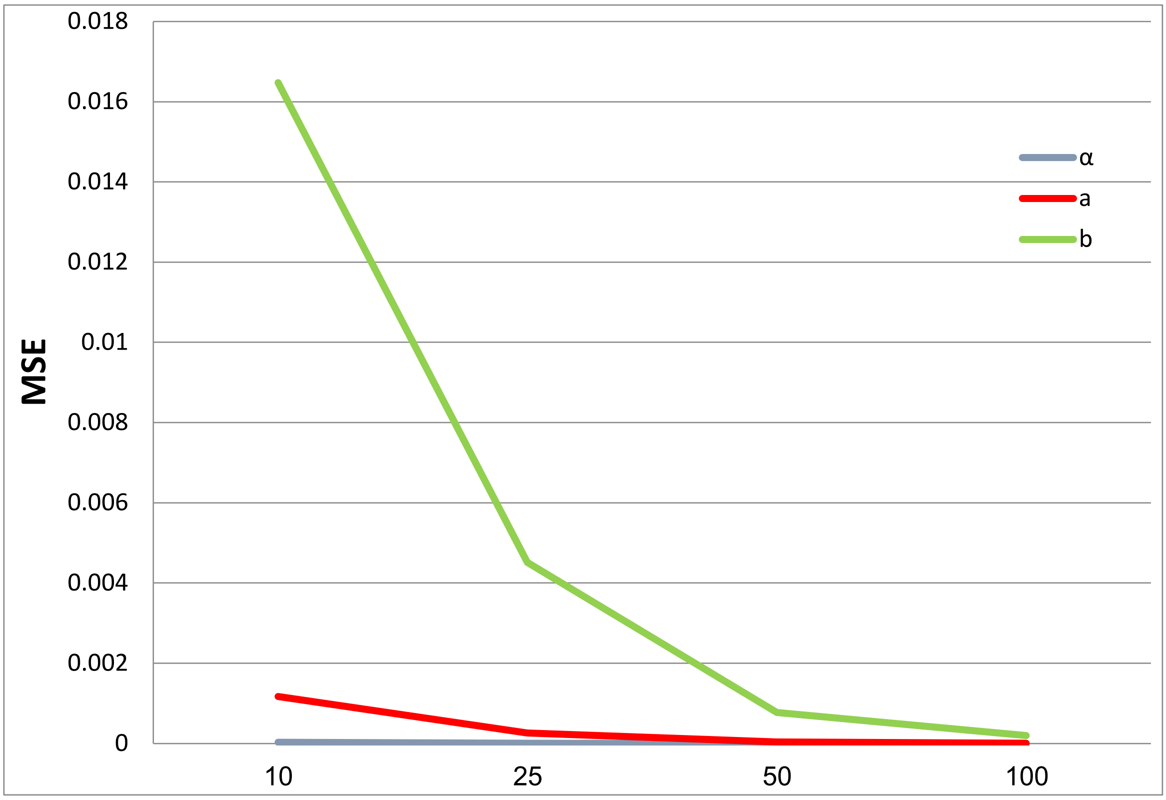
يبيّن بوضوح مدى كفاءة طريقة النسب المئوية على مستوى المَعالِم المقدّرة جميعها، ولأحجام العيّنات المستعملة جميعا، إلّا أنّه يبيّن وبفارق نسبي واضح تغيّر قيم المَعْلَمَات المفترضة في التجربة الأولى:

$(\alpha = 0.1 \,, a = 1.5 \,, b = 2)$ والخامسة $(\alpha = 2 \,, a = 3 \,, b = 4)$ أن المَعْلَمَة α قد تميّزتْ بكونها تمتلك MSE أقلّ مايمكن مقارنة بالمَعْلَمَات الآخرى، في حين كانت المَعْلَمَة (b) هي الأكثر نسبياً بمقدارMSE.

وكذلك في التجربة الثانية $(\alpha = 3 \,, a = 0.1 \,, b = 1.5)$ تبيّنُ أنّ تقدير المَعْلَمَة (a)هو الأفضل مقارنة بالمَعْلَمَات الآخرى، ولأحجام العيّنات جميعا؛ لأنّها تمتلك MSE أقلّ مايمكن، في حين أنّ المَعْلَمَة (α)هي الأكثر نسبياً بمقدارMSE.

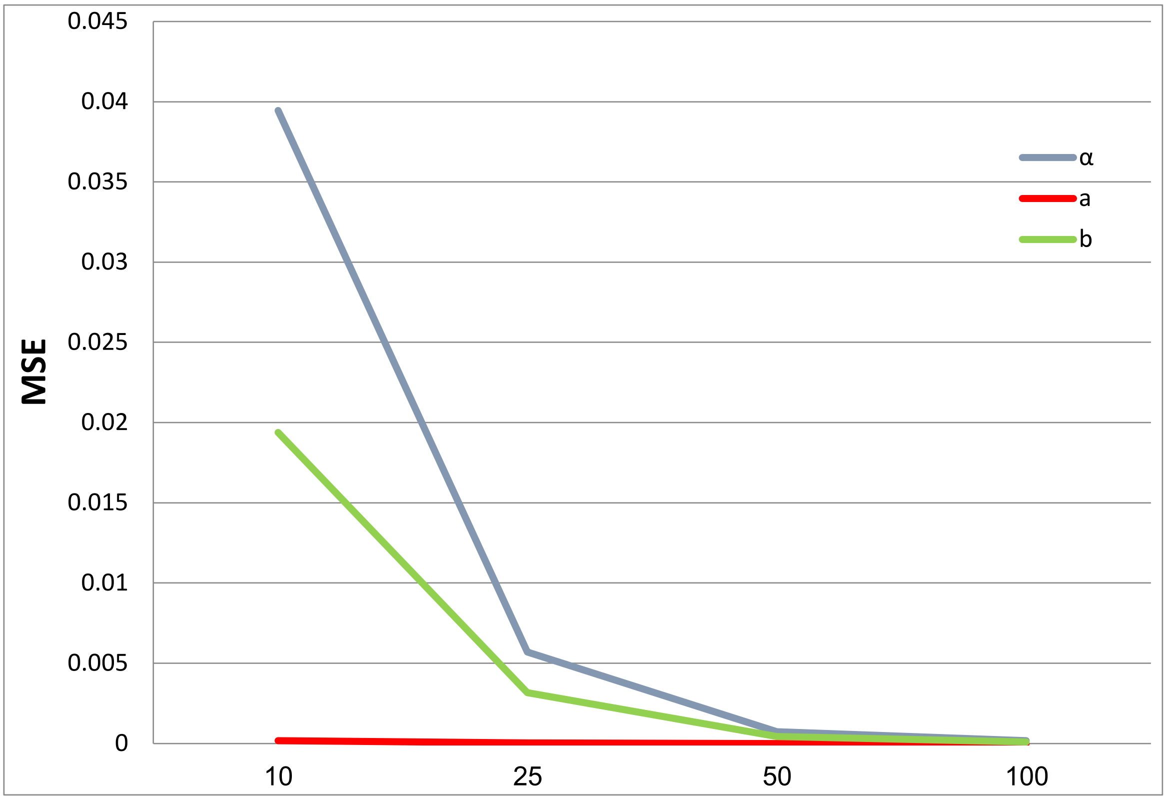
والتجربة الثالثة $(\alpha = 0.5 \,, a = 2 \,, b = 0.1)$ تبيّن أنّ تقدير المَعْلَمَة (b)هو الأفضل مقارنة بالمَعْلَمَات الأخرى، ولأحجام العيّنات جميعا؛ لأنّها تمتلك MSE أقلّ مايمكن، في حين أنّ المَعْلَمَة (a)هي الأكثر نسبياً بمقدارMSE.

وفي التجربة الرابعة $(\alpha = 0.1 \,, a = 0.1 \,, b = 0.1)$ تبيّن أنّ تقدير المَعْلَمَة (b) هو الأفضل من بين المَعْلَمَات الآخرى، ولأحجام العيّنات جميعا؛ لأنّها تمتلك MSE أقلّ مايمكن، في حين أنّ المَعْلَمَة (α) هي الأكثر نسبياً بمقدار MSE. وكما مُبيّن في الأشكال البيانية من (1) إلى(5) التي توضّح مدى تغيّر متوسّط مجموع المربّعات الخطأ بتغيّر مجموعة القيم الافتراضية لكُلّ مَعْلَمَة من مَعْلَمَات التوزيع.



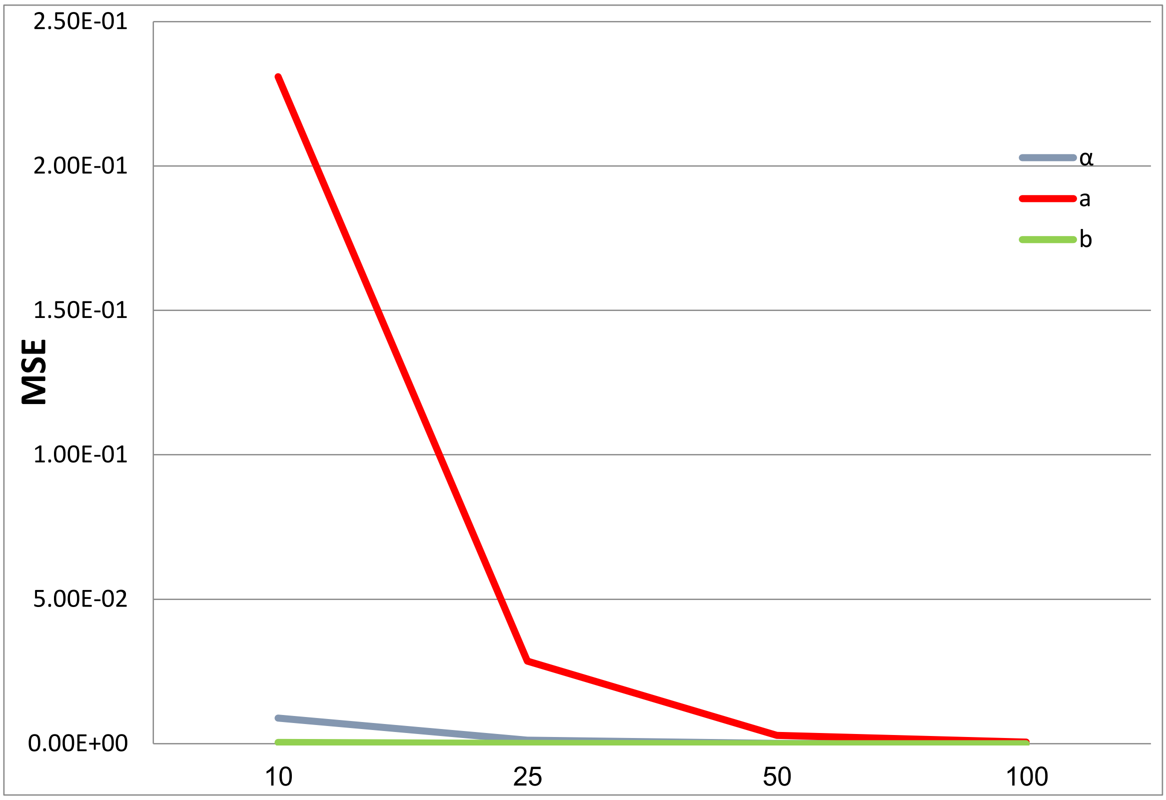
الشكل (1)

يوضّح تغيّر قيم MSEعندما (α=0.1، a=1.5، b=2)



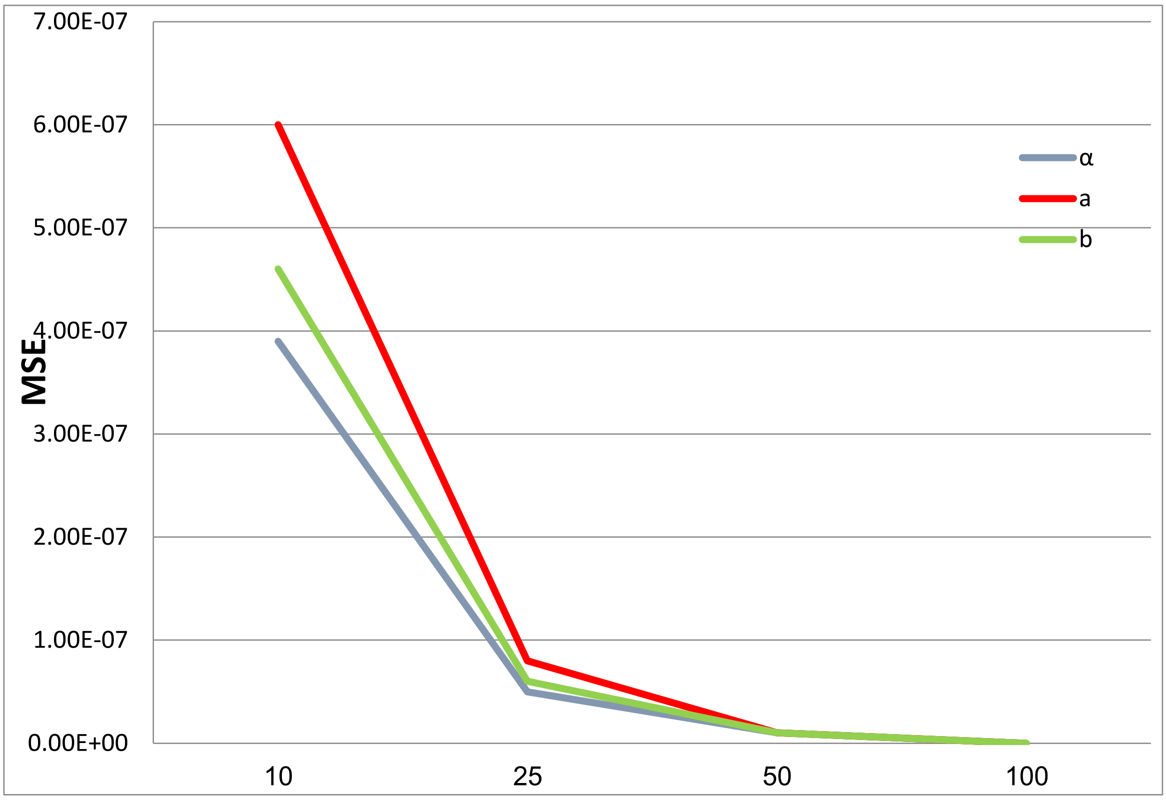
الشكل (2)

يوضّح تغيّر قيم MSE عندما(α=3، a=0.1 ، b=1.5)



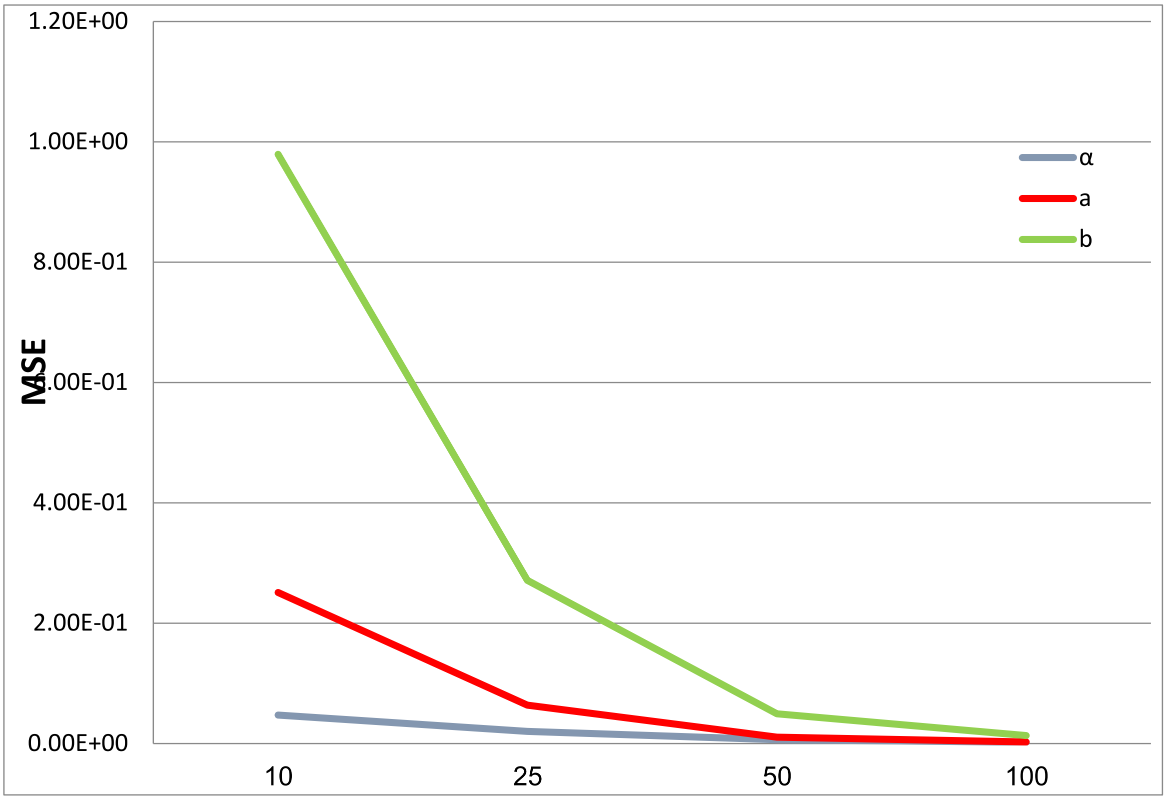
الشكل (3)

يوضّح تغيّر قيم MSEعندما(α=0.5 ، a=2، b=0.1)



الشكل (4)

يوضّح تغيّر قيم MSEعندما(α=0.1، a=0.1، b=0.1)



الشكل (5)

يوضّح تغيّر قيم MSEعندما (α2= ،a=3 ، b=4)

نتائج طريقة المربّعات الصغرى عُرضتْ في الجدول (2) نلاحظ أنّ الجدول يُبيّن أنّ قيم التقديرات للمَعْلَمَات جميعا قد قاربت بشكل كبير القيمة الافتراضية للمَعْلَمَة، ولا سيّما بزيادة حجم العيّنة، الأمر الذي يعني أنّ طريقة المربّعات الصغرى وفّرتْ تقديرات جيّدة لمَعْلَمَات توزيع يمكن الاعتماد عليها.

الجدول (2) القيم التقديرية للمعالم (b ,a, α) باستعمال طريقة Least Square

n	PARAMETAR			ESTIMATOR			BIAS			MSE		
	α	a	b	$\hat{\alpha}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
10	0.1	1.5	2	0.1000627	1.499411	1.996338	0.00006266	-0.00058938	-0.0036617	0.00001326	0.0021576	0.00799941
20				0.0998627	1.498606	2.001489	-0.00013727	-0.00139387	0.00148936	0.00000206	0.00014883	0.00131868
50				0.0999419	1.499655	1.998525	-0.00005807	-0.00034474	-0.001475	0.00000033	0.00001861	0.00020894
100				0.0999899	1.499858	1.999655	-0.00001015	-0.00014244	-0.0003452	0.00000009	0.00000385	0.00005565
10	3	0.1	1.5	2.994866	0.0998625	1.500977	-0.00513372	-1.37E-04	9.77E-04	0.00338237	0.00001084	0.00115004
20				2.994973	0.0997582	1.499761	-0.00502683	-2.42E-04	-2.39E-04	0.00042311	0.00000129	0.00016417
50				2.998629	0.0999513	1.497917	-0.00137053	-4.87E-05	-1.78E-04	0.00004341	0.00000014	0.00002233
100				2.999328	0.0999627	1.499822	-0.0006724	-3.73E-05	-2.08E-03	0.00001016	0.00000003	0.00000544
10	0.5	2	0.1	0.5060992	2.040655	0.1012882	0.00609919	4.07E-02	1.29E-03	3.79E-04	1.79E-02	0.0000192
20				0.500948	2.008449	0.1001455	0.00094804	8.45E-03	1.46E-04	5.62E-05	2.98E-03	0.00000292
50				0.4996349	1.997759	0.099871	-0.00036509	-2.24E-03	-1.29E-04	8.00E-06	4.70E-04	0.0000004
100				0.4996323	1.998106	0.0999007	-0.00036768	-1.89E-03	-9.93E-05	1.93E-06	1.32E-04	0.00000009
10	0.1	0.1	0.1	0.1000053	0.0997069	0.1000414	0.00000534	-2.93E-04	4.14E-05	8.47E-06	1.33E-05	0.0000098
20				0.1000165	0.0997781	0.1000333	0.00001654	-2.22E-04	3.33E-05	1.52E-06	2.15E-06	0.0000018
50				0.1000054	0.0999238	0.1000098	0.00000544	-7.62E-05	9.83E-06	2.10E-07	2.80E-07	0.00000026
100				0.1000118	0.0999634	0.1000156	0.00001185	-3.66E-05	1.56E-05	5.00E-08	6.00E-08	0.00000006
10	2	3	4	1.977001	3.046072	4.144225	-0.02299926	4.61E-02	1.44E-01	4.20E-02	3.04E-01	0.9068783
20				1.988361	2.989142	3.996779	-0.0116388	-1.09E-02	-3.22E-03	7.82E-03	4.94E-02	0.17773366
50				1.998461	2.988279	3.984915	-0.00153923	-1.17E-02	-1.51E-02	1.62E-03	7.90E-03	0.02799758
100				1.997891	2.991465	3.990025	-0.002109	-8.54E-03	-9.98E-03	4.28E-04	1.99E-03	0.00732894

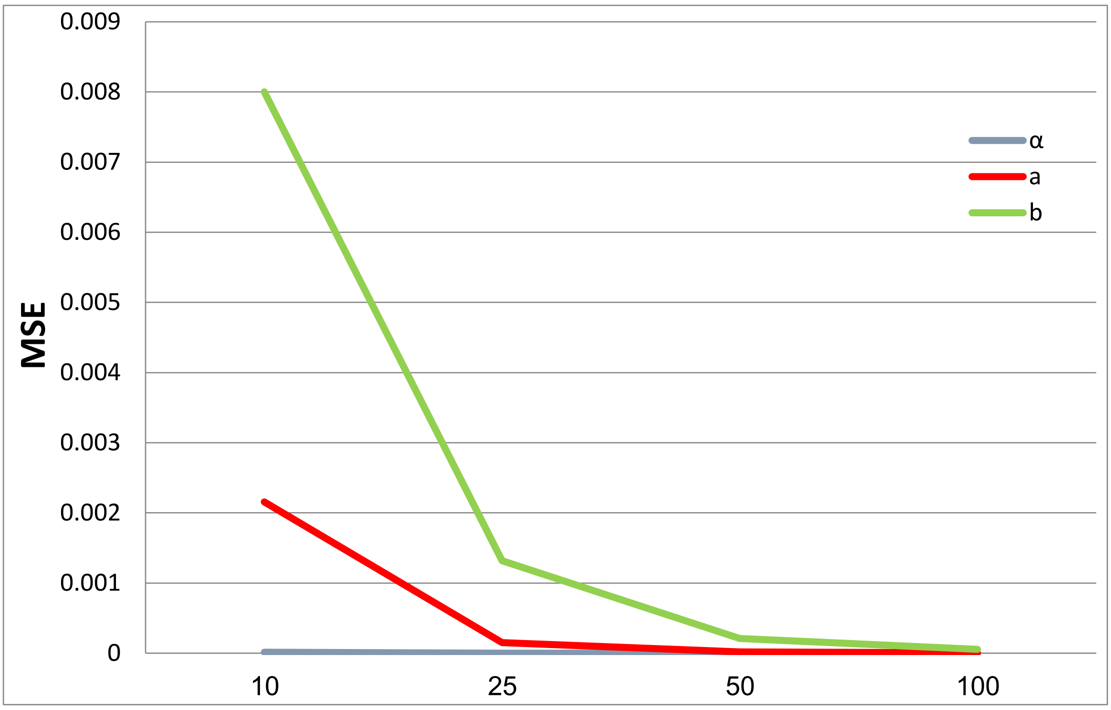
يبيّن بوضوح مدى كفاءة طريقة المربّعات الصغرى على مستوى المعالم المقدّرة جميعا، ولأحجام العيّنات المستعملة جميعها، إلّا إنّه يبيّن_ وبفارق نسبي واضح _ تغيّر قيم المَعْلَمَات المفترضة في التجربة الأولى.

$(\alpha = 0.1 \ , a = 1.5 \ , b = 2)$ والخامسة $(\alpha = 2 \ , a = 3 \ , b = 4)$ إنّ المَعْلَمَة α قد تميّزتْ بكونها تمتلك MSE أقلّ مايمكن مقارنة بالمَعْلَمَات الأخرى، في حين كانت المَعْلَمَة (b) هي الأكثر نسبياً بمقدارMSE.

وكذلك في التجربة الثانية $(\alpha = 3 \ , a = 0.1 \ , b = 1.5)$ يبيّن أنّ تقدير المَعْلَمَة (a)هو الأفضل مقارنة بالمَعْلَمَات الآخرى، ولأحجام العيّنات جميعها؛ لأنّها تمتلك MSE أقلّ مايمكن، في حين أنّ المَعْلَمَة (α)هي الأكثر نسبياً بمقدارMSE.

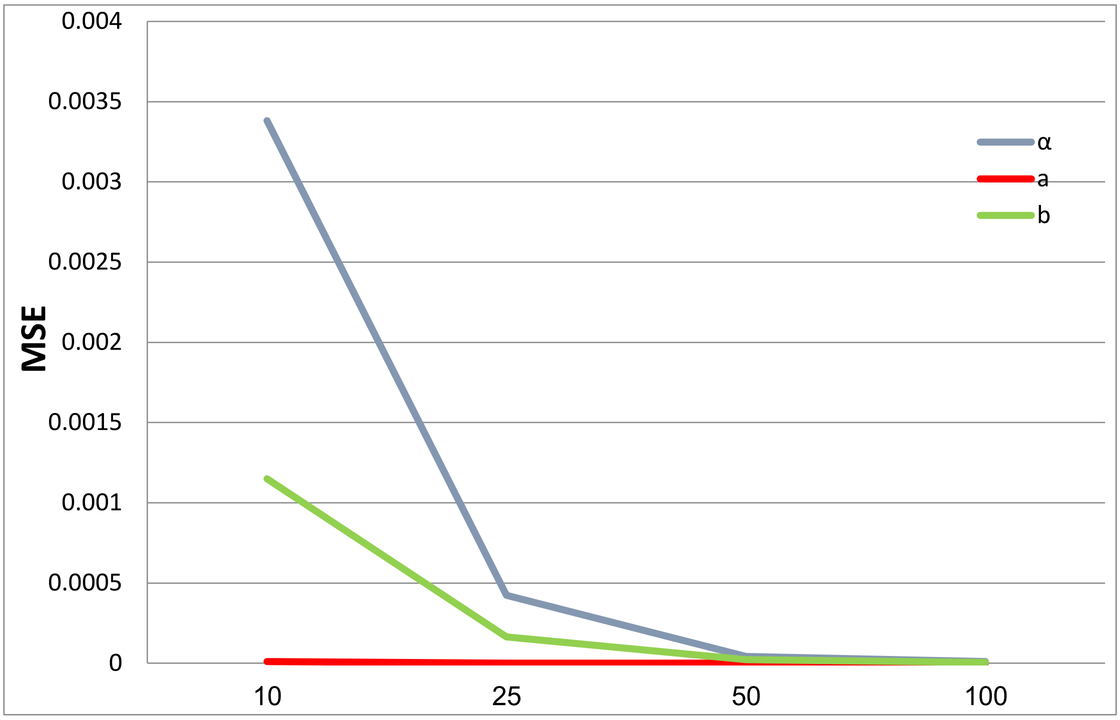
والتجربة الثالثة $(\alpha = 0.5 \ , a = 2 \ , b = 0.1)$ تبيّن أنّ تقدير المَعْلَمَة (b)هو الأفضل مقارنة بالمَعْلَمَات الآخرى، ولأحجام العيّنات جميعها؛ لأنّها تمتلك MSE أقلّ مايمكن، في حين أنّ المَعْلَمَة (a)هي الأكثر نسبياً بمقدارMSE.

وفي التجربة الرابعة $(\alpha = 0.1 \ , a = 0.1 \ , b = 0.1)$ تبيّن أنّ تقدير المَعْلَمَة (α) هو الأفضل من بين المَعْلَمَات الآخرى، ولأحجام العيّنات جميعها؛ لأنّها تمتلك MSE أقلّ ما يمكن. في حين أنّ المَعْلَمَة (a) هي الأكثر نسبياً بمقدار MSE. وكما مبيّن في الأشكال البيانية من (6) إلى (10) التي توضّح مدى تغيّر متوسّط مجموع مربّعات الخطأ بتغيّر مجموعة القيم الافتراضية لكُلّ مَعْلَمَة من مَعْلَمَات التوزيع.



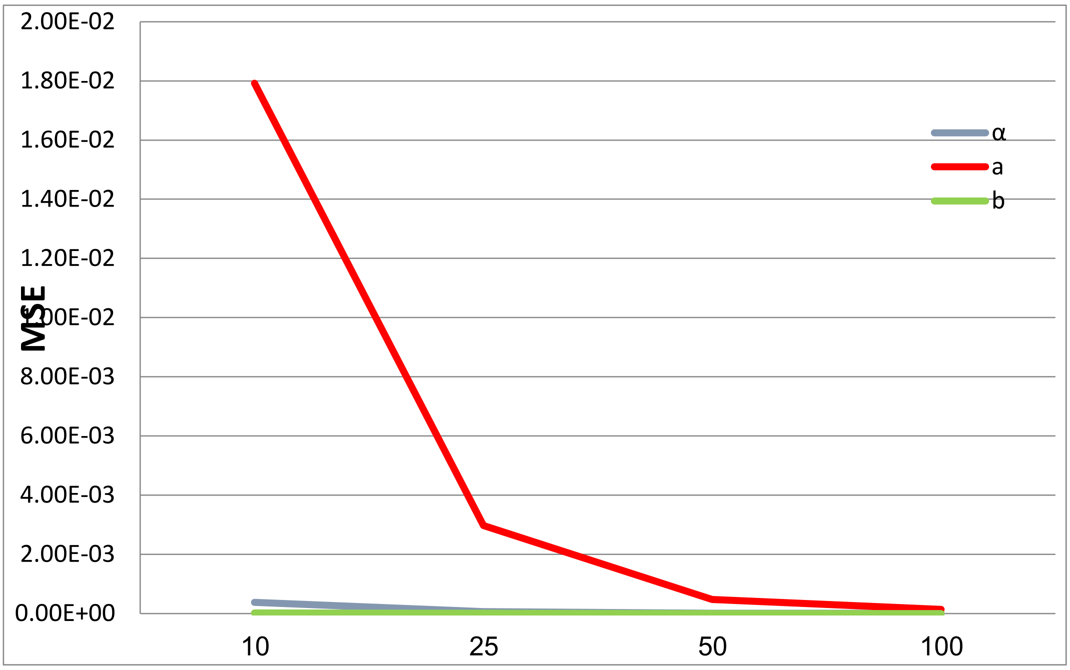
الشكل (6)

يوضّح تغيّر قيم MSEعندما (α0.1=، a=1.5، b=2)



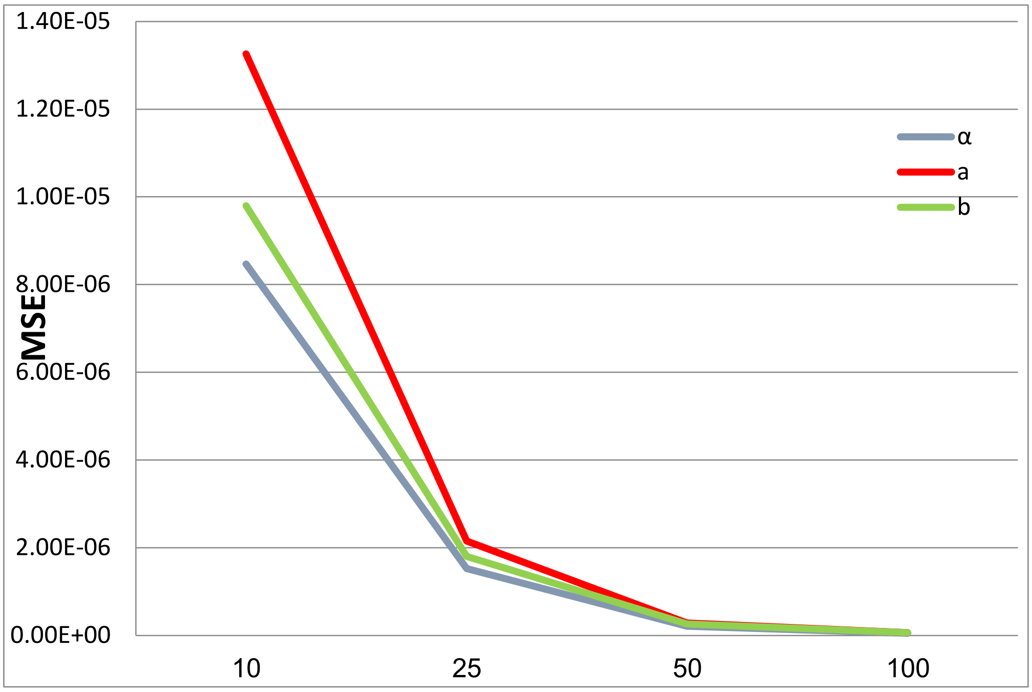
الشكل (7)

يوضّح تغيّر قيم MSEعندما(α3= ،a=0.1 ،b=1.5)



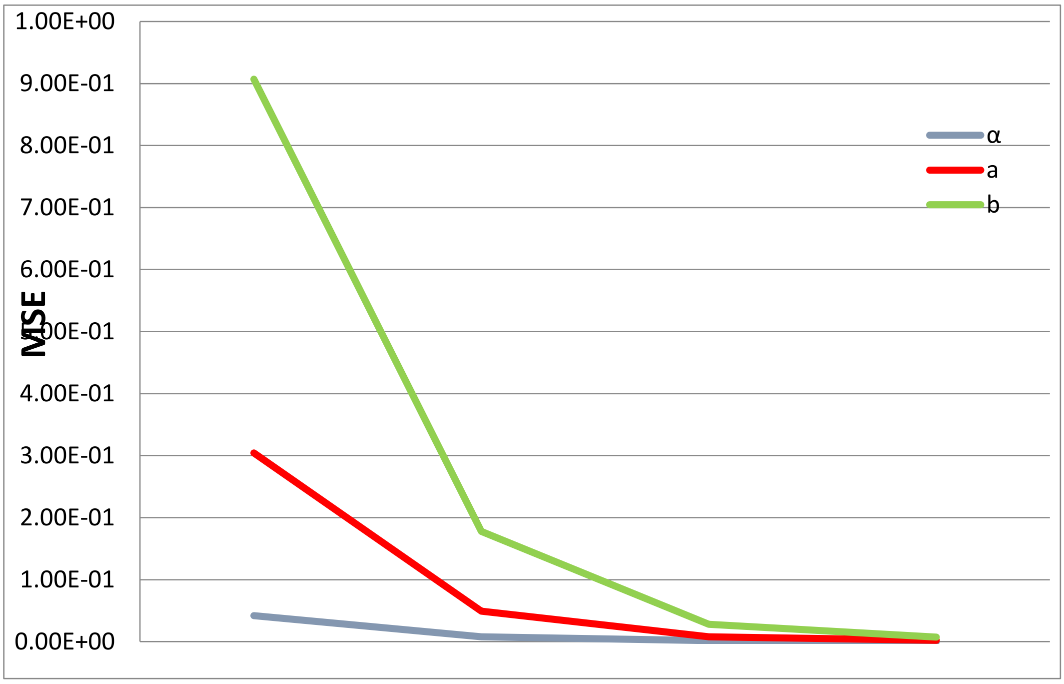
الشكل (8)

يوضّح تغيّر قيم MSEعندما (α0.5=، a=2،b=0.1)



الشكل (9)

يوضّح تغيّر قيم MSE عندما(α=0.1، a=0.1 ، b=0.1)



الشكل (10)

يوضّح تغيّر قيم MSE عندما (α=2، a=3 ،b=4)

10- الاستنتاجات :

بناءً على ما تقدّم تَمّ التوصّل إلى أهمّ الاستنتاجات الآتية:

تَمّ تقديم توزيع جديد بناءً على تعميم رايلي، وذلك بتركيب توزيع كوماراسوامي على تعميم رايلي، والحصول على توزيع جديد بثلاث معالم (a،b،α)، وكذلك تمّ تقديم بعض من الخصائص التوزيع المهمّة مثل (العزوم)، وأيضا تَمّ تقدير معالم التوزيع الجديد باستعمال (الطريقة المعتمدة على النسب المئوية، طريقة المربّعات الصغرى). في الجانب التجريبي، وبناءً على تجارب المحاكاة أثبتتْ طريقة المربّعات الصغرى أنّها كانت الأفضل إذْ بلغت (46) قيمة تقديرية من أصل (60) قيمة تقديرية، وبنسبة 77% ، ومن ثَمّ طريقة النسب المئوية، والتي بلغت (14) قيمة تقديرية من أصل (60) قيمة تقديرية وبنسبة 23% . في تجارب المحاكاة جميعها عند زيادة حجم العيّنة، يكون متوسّط مجموع مربّعات الخطأ أقلّ ما يمكن، وهذا يتّفق مع النظرية الإحصائية(كُلّما زاد حجم العيّنة قلّ متوسّط مجموع مربّعات الخطأ والعكس صحيح).

11- التوصيات

1. نوصي باستعمال التوزيع المقترح في بيانات الحياة؛ لأنّ التوزيع أكثر مرونة من التوزيعات الأخرى.
2. يمكن تقديم طرائق أخرى مثل (طريقة الإمكان الأعظم)، وذلك بتوظيف التوزيعات الأولية لمَعْلَمَات توزيع رايلي كوماراسوامي في إيجاد مقدّرات يمكن مقارنتها مع المقدّرات المُقدّمة للطرائق الحالية.

References

[1] AHMAD, H., BDAIR, O., NASER, M., & ASGHARZADEH, A. (2021) .The Rayleigh Lindley distribution: A new generalization of Rayleigh distribution with physical applications

[2] Al-Noor, N. H., & Assi, N. K. (2020, July). Rayleigh-Rayleigh distribution: properties and applications. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1591, No. 1, p. 012038). IOP Publishing.

[3] Bourguignon, M., Silva, R. B., & Cordeiro, G. M. (2014). The Weibull-G family of probability distributions. *Journal of data science*, *12*(1), 53-68.

[4] GÜNEY, Y., & Arslan, O. (2017). Robust parameter estimation for the Marshall-Olkin extended BURR XII distribution. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, *66*(2), 141-161.

[5] Jones, M. C. (2009). Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages. *Statistical methodology*, *6*(1), 70-81.

[6] Kumaraswamy, P. (1980). A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of hydrology*, *46*(1-2), 79-88.

[7] Lee, C., Famoye, F., & Alzaatreh, A. Y. (2013). Methods for generating families of univariate continuous distributions in the recent decades. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, *5*(3), 219-238.

[8] Mood, A. M., Graybill, F. A., & Boes, D. C. (1974). Introduction to the theory of statistics,. McGraw-Hill series in probability and statistics. *Kogakusha Ltd, Tokyo*..

[9] Orabi, A., & Ziedan, D. (2021). Robust Estimators for Marshal-Olkin Extended Linear Exponential Distribution.

[10] Siddiqui, M. M. (1962). Some problems connected with Rayleigh distributions. Journal of Research of the National Bureau of Standards D, 66, 167-174