AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

تقدير المعوّلية الضبابية لبيانات توزيع (Topp Leone -Kumaraswamy) مع التطبيق

Estimation Fuzzy Reliability of the Distribution Data (Topp leone- Kumaraswamy)With Application

ليث علي محمد[1] laith.mohammed@s.uokerbala.edu.iq

أ. د عبد الحسين حسن حبيب[2] Abdulhussien altee@gmail.com

المستخلص (Abstract)

تُعدّ عملية خلط التوزيعات من العمليات الحيوية والمهمّة، و التي تسهم في زيادة المرونة والكفاءة للتوزيعات الأساس، تَمّ في هذا البحث التعرّف على فكرة حديثة، وهي فكرة بناء دالّة توزيع احتمالية جديدة بواسطة الدالّة المولّدة للتوزيعات (Topp - Leone) من خلال وضع التوزيع المفرد (كوماراسوامي) في الدالّة المولّدة واشتقاق الخصائص الإحصائية للتوزيع المختلط الجديد الناتج (Topp Leone -Kumaraswamy)، والذي يمتاز بالكفاءة والمرونة في تمثيل البيانات. كُلّما زادت مَعْلَمَات التوزيع كُلّما زادت الدقّة والموثوقية والأفضلية، ومن ثمّ تقدير مَعْلَمَات التوزيع المذكور آنفاً باستعمال طرائق تقدير بيز القياسي المعلوماتي في ظلّ دوال خسارة مختلفة. وطريقة خوارزمية التحسين للذئب الرمادي(GWO) ، تَمّت دراسة أوقات الفشل، والتي غالباً ما تكون العشوائية والضبابية خليطاً فيها، وهذا ما يمثّل لها بالأرقام الضبابية، وهذا يقودنا إلى تقدير دالّة المعوّلية الضبابية (FuzzyReliability). في ظلّ مديات انتماء معيّنة للمجموعة الضبابية تَمَّ تطبيق توزيع (TL - Kum) عملياً على البيانات الحقيقية التي تَمَّ الحصول عليها من وزارة الكهرباء / محطّة جنوب بغداد – الزعفرانية، والتي بلغ عددها (70) محرّكاً، تُمثّل وقت تشغيل المحرّك لحين العطل؛ بغية تقدير أوقات الاعطال المتوقعة المستقبلية . وبيّنتْ النتائج أنّ التوزيع المقترح قد حقّق أفضلية واضحة في تمثيل البيانات الحقيقية، فضلاً عن ذلك أظهرت النتائج تفوّق طريقة (BLS_{10}) وعند مستويات القطع المختلفة جميعا.

Abstract

The process of mixing distributions is one of the vital and important processes that contribute to increasing the flexibility and efficiency of the basic distributions. In this research، a new idea was identified، which is the idea of building a new probability distribution function by the function generating the distributions (Topp - Leone) through the single distribution mode (Kumaraswamy). In the function generated and the derivation of the statistical properties of the

resulting new mixed distribution (Kumaraswamy- Topp Leone)، which is characterized by efficiency and flexibility in data representation، as the more parameters of the distribution، the greater the accuracy، reliability and preference، and then estimate the parameters of the aforementioned distribution using the informational standard Bayes estimation methods in light of Different loss functions، and the method of optimization algorithm for the gray wolf (GWO)، the failure times were studied، which are often random and fuzzy mixture in it، and this is expressed in fuzzy numbers، and this leads us to estimate the fuzzy reliability function (Fuzzy Reliability) within certain ranges of belonging to the fuzzy group. Practically applying the (Kum - TL) distribution to the real data obtained from the Ministry of Electricity / South Baghdad Station - Al-Zafaraniya، which numbered (70) engines، representing the operating time of the engine until the failure in order to estimate the expected times of future failures. The results showed that the proposed distribution achieved a clear preference in representing real data. In addition، the results showed the superiority of the (BLS_10) method at all different cut-off levels.

1- منهجية البحث

1-1 المقدّمة

لقد ركّزتْ أغلب الدراسات والبحوث الاكاديمية بشكل واسع وكبير على دراسة التوزيعات الاحتمالية المفردة؛ لما تمثّله هذه التوزيعات من أهمّية بالغة في وصف السلوك الاحتمالي لبيانات الظاهرة المدروسة، وتحديداً عندما تكون هذه البيانات متماثلة وخالية من القيم المتطرّفة، ممّا يعني أنّ لها شكل توزيع احتمالي معيّن، في حين في الدراسات والتجارب الحياتية والطبية والصناعية وغيرها من الجوانب التطبيقية الأخرى قد تكون البيانات عندها غير متماثلة، وقد لا تأخذ شكلاً واحداً من التوزيعات. إذْ إنّ كُلّ جزء منها يسلك سلوك توزيع معيّن، قد يكون من التوزيع نفسه ولكن بمعالم مختلفة. أو قد يكون من توزيعات مختلفة، وفي هذه الحالة يصبح المجتمع المدروس عبارة عن خليط من المجتمعات الفرعية، كُلّ مجتمع له دالّة احتمالية مغايرة تماماً عن المجتمع الفرعي الآخر ومنْ ثَمّ فإنّ السلوك العشوائي للمجتمع المدروس، يمثّل خليط من السلوك العشوائي للمجتمعات الفرعية الأخرى، وهذا النوع من التوزيعات يطلق عليه بالتوزيعات المختلطة (Mixture Distribution)، والذي يُعدّ وسيلة إحصائية متقدّمة تهدف للحصول على المرونة العالية في تحليل النتائج. وقد لجأ الكثير من الباحثين إلى الاعتماد عليها بشكل واسع؛ لأنّ الكثير من المشاهدات التي يحصل عليها الباحث لا يمكن وصفها وتمثيلها بتوزيع واحد.

وبعد التطوّر الكبير في مجال توليد التوزيعات الإحصائية، طوّر العديد من العلماء والباحثين طرائق متعدّدة لتوليد توزيعات مستمرّة ذات كفاءة وفاعلية ناتجة من توزيعات مستمرّة اعتيادية .وتوصّل الباحثون في العديد من الدراسات والبحوث الاكاديمية التي أجريت في السنوات الأخيرة إلى أنّ النماذج الناتجة من عائلة (Topp Leone) لها أفضلية واضحة مقارنة

بالتوزيعات المنفردة؛ والسبب في ذلك يرجع إلى كون التوزيعات المختلطة تبحث عن أغلب الجوانب المحيطة بالظاهرة المدروسة، ومن جانب رياضي غالباً ما تنتمي هذه التوزيعات إلى عائلات محدّدة تعتمد على عامل الزمن، ومن هنا وسيلة مهمّة في: حساب الدالّة المعوّلية للمكائن والمعدّات ودوال البقاء ومعرفة أوقات الفشل لتقييم مستوى عمل الماكنة، والتكهّن بالتكاليف الخاصّة لصيانة هذه المكائن وإعادة تشغيلها، فضلاً عن ذلك تستطيع القيم المحتملة للمعالم الجديدة تحّسين القدرات الإحصائية للتوزيع الأصلي، ممّا يؤثّر بشكل ايجابي على المعالم المركزية وتقليل الاختلاف.

وكما هو معلوم إنّ عملية التقدير تعتمد على البيانات التي لا يمكن تسجيلها بدقّة، نتيجة لأخطاء التجربة أو التدخّل الشخصي أو نتيجة لبعض المواقف غير المتوقّعة، عند ذلك تكون العشوائية والضبابية مزيجاً فيها. ويطلق عليها بأرقام ضبابية (Fuzzy Number) وتحت درجة انتماء يَتُمّ تحديدها وفقاً لدالّة انتماء معيّنة، لذلك لابُد من تعميم أساليب التقدير الاعتيادية الخاصّة بالأرقام الحقيقية إلى أرقام ضبابية، وفي بحثنا هذا تَمَّ اقتراح توزيع جديد بعد وضع توزيع كوماراسوامي المستمرّ في الدالّة المولّدة للتوزيعات (Topp - Leone) عندها سينتج التوزيع المقترح (TL- KUM)، المكوّن من أربع مَعْلَمَات للشكل، وبعد ذلك يَتُمّ العمل على تقدير مَعْلَمَات هذا التوزيع باستعمال طرائق عدّة للتقدير.

1- 2 مشكلة البحث:

- تعاني العديد من البيانات المتعلّقة بأوقات الفشل في الواقع التطبيقي من صعوبة في تشخيص نوع التوزيع الاحتمالي المناسب لها، وتمثيل بيانات العيّنة بتوزيع احتمالي مفرد؛ لكونها قد تعطي نتائج أقلّ دقّة في التقديرات وعدم كفاية شكل التوزيع لتمثيل الظاهرة المدروسة تمثيلاً حقيقياً.
- تُعدّ بيانات العيّنة والمتمثّلة بأوقات الفشل للمكائن بيانات ضبابية، وعند تقدير مَعْلَمَاْت التوزيع ودالّة المعوّلية للمكائن والآلات سوف نلاحظ عدم الدقّة في النتائج؛ بسبب عدم وجود بيانات واضحة تمثّل أوقات الفشل للماكنة، ولمعالجة هكذا حالات تَمَّ استعمال نظرية المجموعة الضبابية.

1- 3 هدف البحث:

- بناء توزيع احتمالي جديد باستعمال الدالّة المولّدة للتوزيعات (Topp Leone)؛ لغرض الحصول على توزيع مختلط ضبابي، يكون أكثر دقّة ومرونة في نمذجة البيانات الحقيقة.
- اشتقاق الخصائص والمؤشّرات الإحصائية المتعلّقة بالتوزيع المختلط الضبابي (TL-KUM)، وتقدير مَعْلَمَاْته باستعمال طرائق عدّة للتقدير.
- تقدير المَعْلَمَاْت ودالّة المعوّلية الضبابية للتوزيع المذكور آنفاً على البيانات الحقيقية المتمثّلة بأوقات الفشل للمحرّكات المنتجة للطاقة الكهربائية، التي استعملت لأغراض الدراسة بالاعتماد على المؤشّر الإحصائي متوسّط مربّعات الخطأ (MSE).

2- الجانب النظري

2-1 مفهوم الضبابية والمنطق الضبابي[2][19][11] Concept Fuzziness And Fuzzy Logic

نواجه في عالمنا الحقيقي والواقعي العديد من المجموعات والفئات والتصنيفات، التي تصنّف فيها العنصر وفق صفة أو معيار غير محدّد بشكل واضح في تحديد ومعرفة درجة انتماء أو عدم الانتماء إلى ذلك العنصر بالنسبة لمجموعته. فالمعرفة البشرية

أصبحت في الوقت الحاضر تزداد أهميّتها بشكل كبير جدا وهائل، وهذه الزيادة ناتجة من تجارب الفضاء أو العالم الذي نعيش فيه واستثمار قدراتنا في التفكير في خلق قاعدة من المعلومات. بمعنى آخر(كيفية صياغة المعرفة البشرية بطريقة منظّمة ومنهجية)، ومن هنا فإنّ هناك محدودية في إمكانية قدرتنا على إدراك العالم والتفكير العميق فيه عند ذلك نجد أنفسنا في كُل زمان ومكان في مواجهة حالة من عدم الدقّة أو اليقين ناتجة من حدوث نقص في المعلومات، وتحديدا عدم الدقّة أو اليقين في القياسات، فنحن لنا القابلية على استيعاب وفهم المعاني الأساس للكلمة والقدرة على التواصل بدقّة إلى درجة مقبولة لغوياً. ولكننا بشكل عام لا يمكنّ أنْ نتفّق بدقّة فيما بيننا على كلمة واحدة أو مصطلحات على المعنى الصحيح، فباختصار تكون لغاتنا الطبيعية ضبابية (غامضة)، عند ذلك تسود تصوراتنا للعالم الحقيقي مصطلحات وحقائق ليس لها حدود محدّدة بشكل دقيق كمصطلح: (الطويل، القصير، أقل من، أكثر من) وما إلى ذلك من المصطلحات فهي صحيحة إلى حدّ ما وخاطئة إلى حدّ ما، عند ذلك فيمكن تسمية هذه الحقائق والمفاهيم بالمفاهيم الضبابية (الغامضة)، وهذه الحقائق يعمل معها العقل البشري ولكن قد لا يعمل معها أجهزة الحاسوب الاليكتروني، ثَمَّ تطوير أجهزة الحاسبات الضبابية عام (1985) من خلال تصميم أول شريحة منطقية بواسطة (Hiroyuki Wantanabe)، وبيّنَ أنّ أجهزة الحاسوب ستكون غامضة، وأقرب بكثير من بيئة العقل البشري، لذا فإنّ العالم الحقيقي برمته معقّد، وهذا التعقيد يتولّد من عدم اليقين ومن ثَمَّ فإنّ هذه المشكلة يتُمّ معالجتها من خلال استعمال المنطق الضبابي.

الضبابية (**Fuzziness**) تُعرّف بأنّها حالة من **عدم اليقين** والغموض في وصف الأحداث والأشياء، ويَتُمّ بموجبها تحويل الكمّيات غير الدقيقة إلى كمّيات ضبابية، التي تُجهّز من خلال تحديد بعض أوجه عدم الدقّة الموجودة في القيم الاعتيادية باستعمال دوال انتماء معيّنة، بشكل تنازلي من العدد (1) إلى العدد (0) بطريقة يتحوّل فيها عنصر الزمن من عنصر منتمٍ إلى عنصر لا ينتمي في مجموعته عند ذلك تتحوّل الأزمنة الاعتيادية جميعها إلى أزمنة ضبابية.

أمّا المنطق الضبابي أو الغائم أو المبهم (Fuzzy Logic) فيُعدّ منظومة منطقية متطوّرة تقوم على تعميم المنطق التقليدي ثنائي القيم (True and False)، وذلك للاستدلال في ظروف عدم التأكّد، فالمنطق يُعدّ من التقنيات والأساليب المتطوّرة، إذْ يتمتّع بالقدرة على حلّ المشاكل على نطاق واسع في المجالات العلمية والتطبيقية المتعددة جميعها، كما يُعدّ هذا المنطق منهج للتفكير البشري، يسمح بالقيم والاستدلالات التقريبية والبيانات الغامضة أو الناقصة بدلاً من الاعتماد على البيانات الواضحة، لذا فهو منطق للحياة ، منطق أفعالنا وتصرفاتنا وتحركاتنا منذ الصغر، يقوم على أساس الانضباط والتوصّل إلى الدقّة واليقين في عالم من الغموض، وعدم الدقّة، وعدم اليقين في كُلّ شيء حولنا كدرجات الحرارة والأطوال والسرعات وغيرها من الأشياء الأخرى التي لا يمكن تمثيلها بالمنطق التقليدي (الاعتيادي) (Crisp logic).

2-2 مفهوم المجموعة الاعتيادية والضبابية [3][18][19] Concept Fuzzy and Crisp Sets

تُعرّف المجموعة الاعتيادية (التقليدية) بأنّها عبارة عن مجموعة من العناصر أو الأشياء قابلة للعدّ مبنيّة على مبادئ وقواعد رياضية منطلقة من مفهوم أنّ العنصر أو الشيء. إمّا أنْ يكون عنصراً منتمياً للمجموعة أو غير منتمٍ مع وجود أفضلية وتمايز مطلق ما بين الانتماء وعدم الانتماء لأيّ مجموعة معرفة، وأبرز ما يميزّ هذه المجموعة هو حدودها الصريحة والواضحة لكلّ عنصر منتمٍ لمجموعته فلا يسمح بوجود عنصر في المجموعة وغير موجود في المجموعة، أي خارجها في الوقت نفسه،

(بشار خالد ، 2022 ، ص 11) ومن ثمّ فإنّ العديد من تطبيقات ومجالات العالم الحقيقي لا يمكن وصف مشاكلها ومعالجتها من خلال نظرية المجموعة الاعتيادية أو التقليدية، بما في ذلك العناصر جميعها التي تضمن عناصر منتمية إلى المجموعة:

ولنفترض (X) يمثّل مجموعة شاملة (Universe of Discourse)، و (A) تمثّل مجموعة جزئية فيها، عند ذلك فإنّ كُلّ عنصر للمجموعة الشاملة (X) بالنسبة للمجموعة الجزئية (A) يمكن أنْ ينتمي أو لا ينتمي للمجموعة (A).

ولنفترض ايضا $\mu_A(X)$ تمثّل دالّة مميزة (Characteristic Function) للمجموعة (A) تزود كُلّ عنصر في المجموعة الجزئية (A) درجة توافق (انتماء) وتكون هذه الدالّة ثنائية القيم (1،0) وكما يأتي:

$$\mu_A(X) = \begin{cases} 1 & IF\ X \in A \\ 0 & IF\ X \notin A \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad (2-1)$$

فإذا كانت $\mu_A(X) = 1$ ، فهذا يعني أنّ العنصر (X) له انتماء قوي جدا أو تام للمجموعة A.

وإذا كانت $\mu_A(X) = 0$ ، هذا يعني أنّ العنصر (X) لا ينتمي إطلاقاً بالنسبة للمجموعة A.

أمّا المجموعة الضبابية (Fuzzy Set) فهي مجموعة تتناقض تماماً مع المجموعة التقليدية، وتكون حدودها عائمة تحتوي على عناصر بدرجات متفاوتة من الانتماءات والتوافقية، إذْ إنّ كُلّ عنصر في المجموعة الضبابية له درجات انتماء معيّنة، ويَتُمّ تحديد هذه الدرجة من خلال ما يعرّف بدالّة الانتماء (Membership Function)، وهذه الدالّة بدورها تقوم بتخصيص كُلّ عنصر في المجموعة بدرجة انتماء ضمن المدّة الواقعة (1،0) فضلاً عن ذلك يسمح للعنصر بالانتماء الجزئي (Partial Membership Function).

ولنفترض (X) يمثّل مجموعة شاملة (Universe of Discourse) يَضُمّ فضاء العيّنة الضبابية، كما وإنّ $(\tilde{A})$ تمثّل مجموعة جزئية ضبابية فيها، ولنفترض أيضا $\mu_{\tilde{A}}(X)$ تمثّل دالّة انتماء مميّزة (Characteristic Function) والتي تولّد قيم ضمن المدّة (1،0) لكُلّ قيم (X) في فضاء العيّنة الضبابية.

$$\tilde{A} = \left\{ \left(X_i \quad ، \mu_{\tilde{A}}(X) \right) \quad ، x \in X_i \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2-2)$$

$$i = 1 ، 2 ، 3 ، . \ . \ . n \quad ، 0 \leq \mu_{\tilde{A}}(X) \leq 1$$

عندما تكون قيمة دالّة الانتماء $\mu_{\tilde{A}}(X_0) = 1$ هذا يعني أنّ عنصر X_0 ينتمي بشكل تام إلى المجموعة الجزئية الضبابية $(\tilde{A})$، وعندما تكون $\mu_{\tilde{A}}(X_1) = 0$، وهذا يعني أنّ عنصر (X1) لا ينتمي إطلاقاً المجموعة الجزئية الضبابية $(\tilde{A})$.

أمّا إذا كانت $\mu_{\tilde{A}}(X)$ مساوية إلى (1) أو (0) عند ذلك سنحصل على مجموعة جزئية تقليدية (غير ضبابية) من فضاء العيّنة (X)

2- 3 قطع τ - $(\tau - Cut)$ [9][4]

تُعرّف ($\boldsymbol{\tau}$) بأنّها أقلّ درجة يمتلكها أيّ عنصر في المجموعة الضبابية ($\tilde{A}$) ويشترط أنْ تكون قيمة هذه الدرجة تكون محصورة ضمن المدّة المغلقة (1 ، 0)، و الهدف من إجراء عملية القطع هو لتحديد درجات الانتماء للعناصر المهمّة المحدّدة بين قيمتين على خطّ قاعدة المجموعة الضبابية ($\tilde{A}$). أمّا العناصر الأخرى فتكون خارج عملية القطع .:

2- 4 دوال الانتماء (التوافقية) [3][4][8] (Membership Function)

دالّة الانتماء عبارة عن دالّة عددية تُعدّ من أهمّ مفاهيم نظرية المجموعة الضبابية (Fuzzy Sets Theory)، والتي يمكن بواسطتها احتساب درجة انتماء عنصر معيّن للمجموعة الضبابية على أساس صفة أو معيار ضبابي، إذْ تولّد قيم عددية موجبة تقع ضمن مجال الأعداد الحقيقية في المدّة المغلقة (1،0) لتمثّل درجة انتماء كُلّ عنصر موجود في المجموعة الشاملة الاعتيادية إلى المجموعة الضبابية (الغامضة). وهناك العديد من دوال الانتماء نذكر منها الدالّة التي تَمَّ الاعتماد عليها في البحث ومنها:

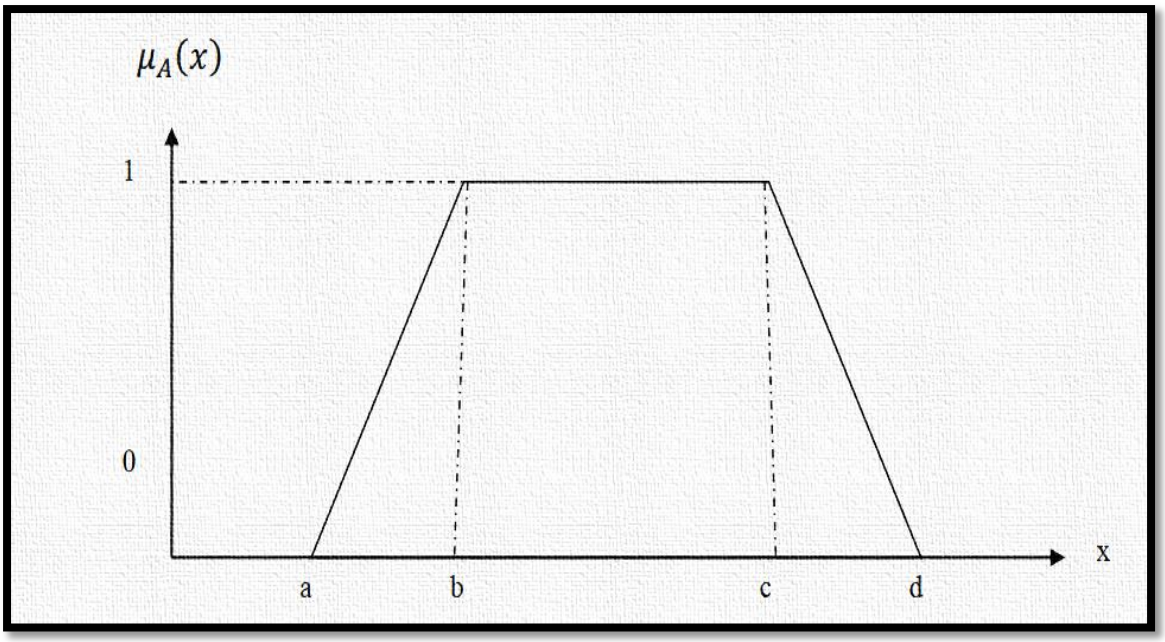
دالّة الانتماء شبه المنحرف (الرباعية)

(Trapezoid Membership Function)

عبارة عن دالّة خطّية محدّدة بأربع معالم أساس متمثّلة بالحدّ الأدنى (a) ومَعْلَمَة الحدّ الأعلى (d) فضلاً عن معلمتين (b،c)، كَحدّ وسطٍ على التوالي، ويمكن التعبير عن هذه الدالّة على وفق الصيغة الآتية: [11]

$$M_A(X) = \begin{cases} 0 & if \quad X \le a \\ \dfrac{X-a}{b-a} & if \quad a \le X \le b \\ 1 & if \quad b \le X \le c \\ \dfrac{d-X}{d-c} & if \quad c \le X \le d \\ 0 & if \quad d \le X \end{cases} \qquad . \qquad (2-3)$$

كما ويمكن التعبير عنها بيانياً على وفق الشكل (7 - 2) وكما يأتي:



الشكل (1 - 2) يمثّل دالّة الانتماء شبه المنحرف (الرباعية).

4-2 توزيع كوماراسوامي[14][21] Kumaraswamy Distribution

هو توزيع احتمالي ينتمي إلى عائلة التوزيعات المستمرة (Continuous Distributions) تَمّ اقتراحه بالأصل من قبل العالم (Poondi Kumarswamy) في عام (1980) كتوزيعٍ احتمالي جديدٍ للمتغيّرات ذات الحدود الدنيا والعليا. يمتلك هذا التوزيع مَعْلَمَتين شكل موجبتين ومحدّدة بالمدّة الزمنية المغلقة (0،1)، يمتاز هذا التوزيع بالمرونة العالية، ويستعمل على نطاق واسع في وصف المتغيّرات ونمذجة البيانات في مجال الطب والهندسة والاقتصاد والفيزياء وباقي العلوم التطبيقية الأخرى، ويشبه هذا التوزيع إلى حدّ كبير توزيع بيتا (Beta Distribution). ويشترك معه في الكثير من الخصائص والصفات ماعدا الدالّة التجميعية التي تأخذ شكلاً مغلقاً، وهذا ما يجعله ملائماً في الكثير من الأنظمة ومنها المحاكاة، ومن خصائص هذا التوزيع:

- **دالّة الكثافة الاحتمالية (PDF) (Probability Density Function)**

ويمكن التعبير عن دالّة الكثافة الاحتمالية (Probability Density Function) لهذا التوزيع على وفق الصيغة الآتية :

$$f(t،\theta،\beta) = \theta\beta t^{\beta-1}\left[1-t^{\beta}\right]^{\theta-1} \quad . \quad . \quad . \quad (2-4)$$

إذْ إنّ:

$$0 < t < 1$$

- **دالّة التوزيع التجميعية (Cumulative Distribution Function)**

دالّة التوزيع التجميعية لمتغيّر عشوائي يتّبع توزيع كوماراسوامي تعطى على وفق الصيغة الآتية:[12]

$$F(t،\theta،\beta) = 1 - [1 - t^{\beta}]^{\theta} \quad . \quad . \quad . \quad (2-5)$$

- **الدالّة الكمّية (quintile Function):** وهي الدالّة العكسية للدالّة التجميعية لتوزيع كوماراسوامي. ويمكن الحصول عليها على وفق الصيغة الآتية:

$$U = F(t)$$

$$t = F_{(U)}{}^{-1}$$

$$U = 1 - [1 - t^{\beta}]^{\theta}$$

$$(1-U)^{\frac{1}{\theta}} = (1 - t^{\beta})$$

$$1 - (1-U)^{\frac{1}{\theta}} = t^{\beta}$$

$$t = \left[1 - (1-U)^{\frac{1}{\theta}}\right]^{\frac{1}{\beta}} \quad . \quad . \quad . \quad (2-6)$$

- **التوقّع والتباين للتوزيع**

$$E(t) = \mu = \acute{\mu}_1(t) = \theta B\left(1 + \frac{1}{\beta}،\theta\right) \quad (2-7)$$

إذْ إنّ:

$B\left(1 + \frac{r}{\beta}،\theta\right)$: تمثّل دالّة بيتا (beta Function)

$$V(t) = \mu_2 = \acute{\mu}_2(t) - \mu^2$$

$$V(t) = \theta B\left(1 + \frac{2}{\beta}\ ،\ \theta\right) - [\theta B\left(1 + \frac{1}{\beta}\ ،\ \theta\right)]^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2-8)$$

2- 5 الدالّة المولّدة للتوزيعات[5][7][9] (Topp - Leone)

لقد واكب التطوّر الهائل في التكنولوجيا والعلوم في مختلف ميادين حقول المعرفة، ممّا دفع معظم العلماء والباحثين إلى تطوير بعض التوزيعات الاحتمالية التقليدية، التي أصبحت لا تتناسب مع العديد من الظواهر والدراسات في السنوات الأخيرة؛ لكون أغلب الظواهر في العصر الحديث أصبحت تتغيّر في مجالات علمية متعدّدة. ومن أهمّ الباحثين الذين انصّب اهتمامهم بهذا المجال، نذكر منهم (Castro، Cordeiro) اللذَيْن قاما بتكوين عائلة مولّدة للتوزيعات أطلق عليها (**Kumaraswamy – G Family**)، وأيضاً قام (Eugene) وآخرون بتوليد عائلة بيتا المعمّمة، فضلاً عن ذلك قام

(Ortega،Gokarna) بتوليد توزيع (*Topp- Leone - Weibuil*) لبيانات جداول الحياة وغيرها من الدوال أو العوائل الأخرى.

إنّ الصيغة العامّة للدالّة المولّدة للتوزيعات الاحتمالية (PDF) لـ (**Topp – Leone**) يمكن كتابتها على النحو الآتي**:**

$$f_{TLG}(\mathbf{t}) = \mathbf{2}\alpha\lambda\, g(t)[G(t)]^{\alpha\lambda-1}\left[1 - G(t)^{\lambda}\right]\left[2 - G(t)^{\lambda}\right]^{\alpha-1} \ldots \qquad (2-9)$$

والصيغة العامّة لدالّة المولّدة للتوزيعات الاحتمالية التجميعية (CDF) لـ (Topp - Leone)على وفق الصيغة الآتية :

$$F_{TLG}(\mathbf{t}) = \left\{G(t)^{\lambda}\left[2 - G(t)^{\lambda}\right]\right\}^{\alpha} \qquad \ldots \qquad (2-10)$$

إذْ إنّ:

$g(t)$: تمثّل دالّة الكثافة الاحتمالية (PDF) للتوزيع الأولي المختلط مع قاعدة توزيع (Topp – Leone).

$G(t)$: تمثّل دالّة الكثافة الاحتمالية التجميعية (CDF) للتوزيع الأولي المختلط مع قاعدة توزيع (Topp – Leone).

2- 6 التوزيع المقترح (Topp - Leone -Kumaraswamy Distribution)

لإيجاد الدالّة الاحتمالية (PDF) للتوزيع المقترح (**Topp - Leone -Kumaraswamy**) يَتُمّ ذلك من خلال تعويض الصيغة رقم (4- 2)، التي تمثّل دالّة الاحتمالية (PDF) للتوزيع الاعتيادي (**Kumaraswamy Distribution**) ، والصيغة رقم (5 - 2)، التي تمثّل الدالّة التجميعية (CDF) للتوزيع الاعتيادي (**Kumaraswamy Distribution**) وتعويضها في المعادلة رقم (9 - 2)، التي تمثّل الدالّة المولدة للتوزيعات الاحتمالية (**Topp - Leone**)، لنحصل بعد ذلك على شكل دالّة التوزيع الاحتمالي للتوزيع المقترح الجديد، والذي يمكن التعبير عنه على وفق الصيغة الآتية:[7]

$$f_{TLKUM}(\mathbf{t}) = \mathbf{2}\alpha\lambda\,\theta\beta t^{\beta-1}\left[1 - t^{\beta}\right]^{\theta-1}\left[1 - (1 - t^{\beta})^{\theta}\right]^{\alpha\lambda-1}\Big[1 - \left[1 - (1 - t^{\beta})^{\theta}\right]^{\lambda}\Big]\left[2 - [1 - (1 - t^{\beta})]^{\lambda}\right]^{\alpha-1}$$

$$\ldots \qquad (2-11)$$

فضلاً عن ذلك يمكن الحصول على دالّة التجميعية (CDF) للتوزيع المقترح الجديد من خلال تعويض الصيغة رقم (4- 2)، والصيغة رقم (5 - 2) في المعادلة رقم (10 - 2)، عند ذلك سوف نحصل على الدالّة التجميعية للتوزيع المقترح (Topp - Leone -Kumaraswamy)، ويمكن التعبير عنه على وفق الصيغة الآتية:

$$F_{TLKUM}(\mathbf{t}) = \left\{\left(1 - (1 - t^{\beta})^{\theta}\right)^{\lambda}\left[2 - \left(1 - (1 - t^{\beta})^{\theta}\right)^{\lambda}\right]\right\}^{\alpha} \ldots \qquad (2-12)$$

إذْ إنّ:

$$\alpha > 0 \text{ ، } \boldsymbol{\lambda} > 0 \quad \text{ ، } \theta > 0 \text{ ، } \beta > 0$$

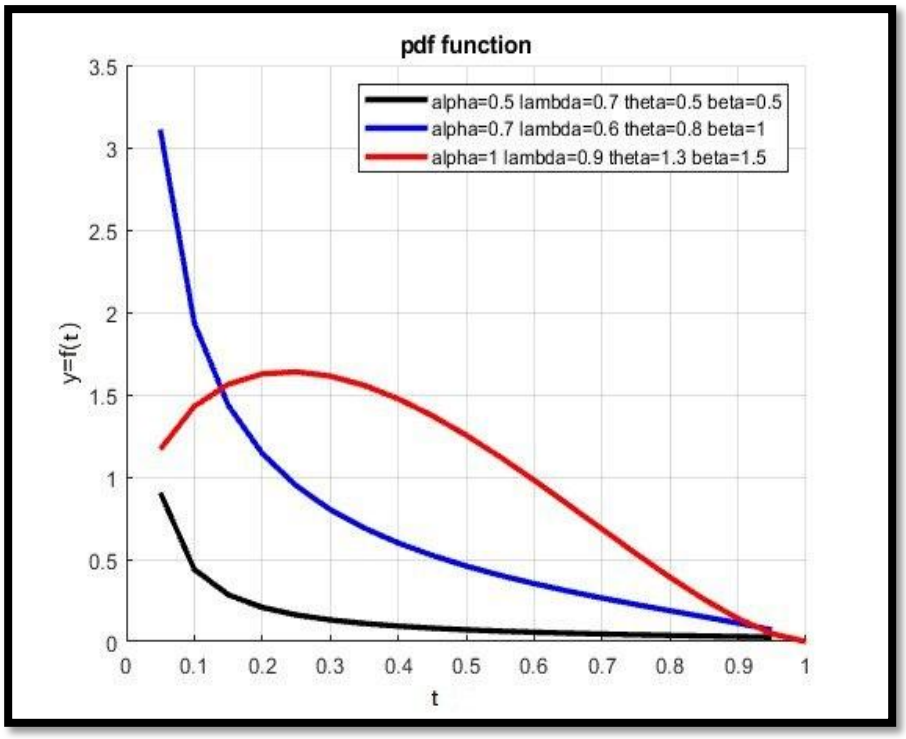
ولغرض إثبات أنّ دالّة التوزيع المقترح (Topp – Leone - Kumaraswamy distribution) تمثّل دالّة توزيع احتمالية، يجب تحقّق شرطين هما:

الشرط الأول: هو أن الدالّة موجبة لحدود المتغيّر كافّة (t) إيْ إنّ:

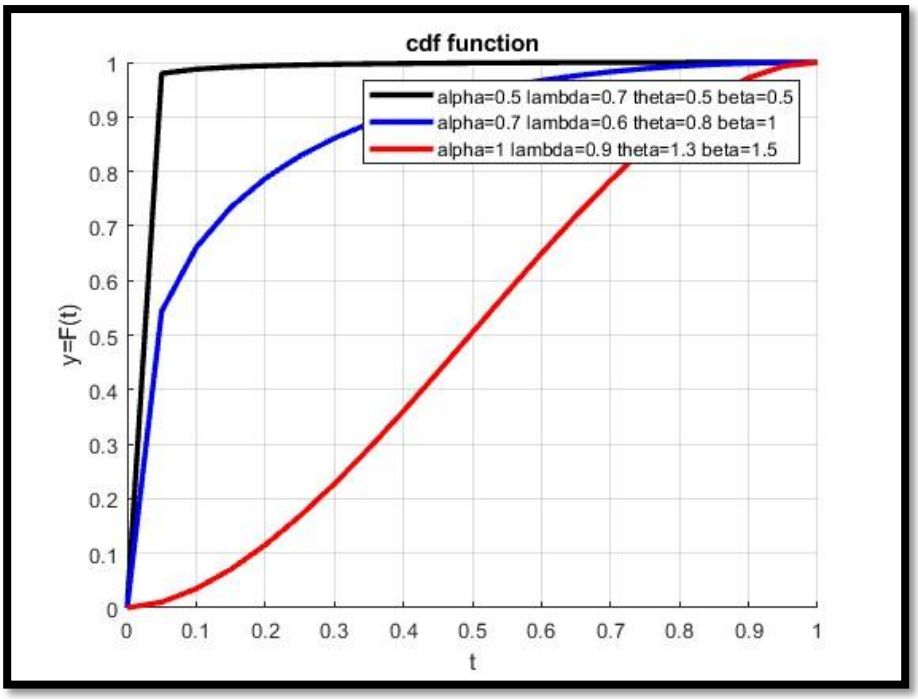
$$\boldsymbol{f_{TLKUM}(t) \geq 0} \qquad \forall\, t \in R$$

الشرط الثاني: هو أنّ تكامل الدالّة لقيم المتغيّر كافّة (t) يساوي واحدا، أيْ إنّ:

$$\int_0^1 \boldsymbol{f_{TLKUM}(t)} = 1$$



الشكل (2 – 2) دالّة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المقترح(f_{TLKUM}) (عمل الباحث)

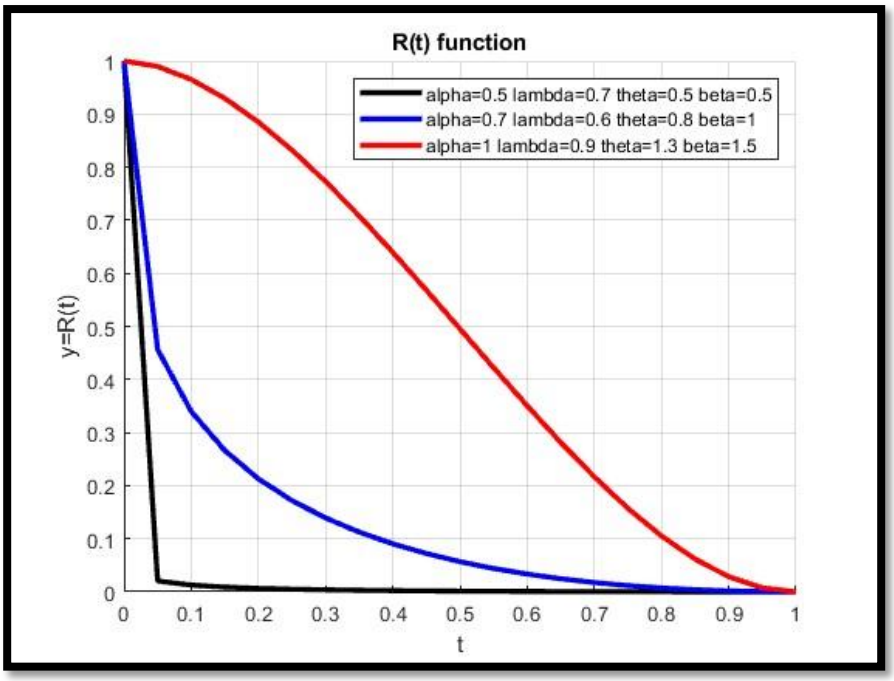


الشكل (2 - 3) دالّة التجميعية للتوزيع المقترح (F_{TLKUM}) (عمل الباحث)

الدالّة المعوّلية للتوزيع المقترح $(TLKUM)$

$$\mathbf{R(t) = 1 - F_{TLKUM}(t)}$$

$$\mathbf{R(t) = 1 - \left\{\left(1 - \left(1 - t^{\beta}\right)^{\theta}\right)^{\lambda}\left[2 - \left(1 - \left(1 - t^{\beta}\right)^{\theta}\right)^{\lambda}\right]\right\}^{\alpha}} \quad . \quad . \quad . \quad (2-12)$$



الشكل (2 - 4) دالّة المعوّلية للتوزيع المقترح (R_{TLKUM}) (عمل الباحث)

2- 7 التوزيع المقترح المختلط الضبابي

(Suggested Fuzzy Mixed Topp - Leone -Kumaraswamy Distribution)

نفرض أنّ أوقات الفشل الاعتيادية $(t \in T)$ تمثّل أوقات مُضَلّلة وغير دقيقة، يُمثّل لها بأرقام عائمة (ضبابية) $(\tilde{t} \in \tilde{T})$ بحيث إنّ

$$\tilde{\boldsymbol{t}} = [(\mathbf{0}, \infty) \ , \ \boldsymbol{m}_{\tilde{t}}(\boldsymbol{t})]$$

عند ذلك فإنّ متّجه العيّنة الاعتيادي يَتُمّ الحصول عليه من المجموعة الضبابية، والذي يمثّل العناصر كُلّها التي تمتلك درجة انتماء أكبر أو تساوي قطع بيتا $(\boldsymbol{\tau} - Cut)$، وهي الدرجات التي نرغب بها. ويمكن التعبير عنها بالمجموعة $A^{(\tau)}$ وكما يأتي:

$$\boldsymbol{A^{(\tau)} = \{\tilde{t} = (0,1) \in \tilde{T} \ , \ m_{\tilde{t}}(t) = \tau \ ; \ m_{\tilde{t}}(t) \geq \tau\}} \quad \ldots (2-13)$$

إذْ إنّ :

τ: تمثّل معامل القطع $\mathbf{0 < \tau < 1}$

$\boldsymbol{m_{\tilde{t}}(t)}$: تمثّل دالّة الانتماء، والتي من خلالها يَتُمّ توليد درجة انتماء كُلّ وقت فشل في الفضاء العيني، ولها الحرية المطلقة في اختيار أيْ شكل من أشكال الدوال.

ومن ثَمّ فإنّ $(\tilde{t}A^{(\tau)})$ مقدار قابل لقياس بوريل (Borel Measurable)، والذي يمثّل فضاء العيّنة الضبابي كما أسلفنا سابقاً. أمّا الأحداث الضبابية فإنّها تمثّل أقل حقل سكما بوريل $(\sigma - \text{Borel})$؛ لذا فإنّ دالّة التوزيع التجميعية الضبابية $(\widetilde{CDF})$ عند أيّ قيمة من قيم فضاء العيّنة الضبابية $\boldsymbol{A^{(\tau)}}$ يمكن الحصول عليها من خلال تطبيق الصيغة الآتية:[13]

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}\left(\tilde{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{\tau})}\right) = \int_{\boldsymbol{0}}^{\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{\tau})}}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{du} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2-14)$$

ومن خلال تكامل الصيغة المذكورة آنفاً بالنسبة إلى $(\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}^{(\tau)}})$ عند ذلك سنحصل على التوزيع الاحتمالي الضبابي (Fuzzy Probability Distribution)، والتي بدورها تعمل على تحويل أيّ توزيع احتمالي اعتيادي إلى توزيع ضبابي، ويمكن التمثّل عنه على وفق الصيغة الآتية:

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(\tilde{\boldsymbol{t}}) = \frac{\boldsymbol{\partial}\widetilde{\boldsymbol{F}}(\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}^{(\tau)}})}{\boldsymbol{\partial}\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}^{(\tau)}}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}^{(\beta)}}}\left[\int_{\boldsymbol{0}}^{\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}^{(\beta)}}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{du}\right] \ . \ . \ . \qquad (\mathbf{2-15})$$

لذا يَتُمّ الحصول على التوزيع (TLKUM) الضبابي المقترح من خلال تطبيق الصيغة (12-2)، وتعويضها في الصيغة (16 - 2) ينتج عنها دالّة الاحتمال التجميعي(CDF) الضبابي للتوزيع المقترح وكما يأتي:[3]

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}(\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau})}) = \left\{\left(\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau})}{}^{\boldsymbol{\beta}})^{\boldsymbol{\theta}}\right)^{\boldsymbol{\lambda}}\left[\mathbf{2} - \left(\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau})}{}^{\boldsymbol{\beta}})^{\boldsymbol{\theta}}\right)^{\boldsymbol{\lambda}}\right]\right\}^{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$. \ . \ . \ (\mathbf{2-16})$$

إنّ دالّة الكثافة الاحتمالية(PDF) للتوزيع المقترح(TLKUM) الضبابي يمكن الحصول عليها من خلال تطبيق الصيغة $(\mathbf{2-14})$ وتعويضها في الصيغة $(\mathbf{2-16})$ عند ذلك سينتج عنها الصيغة الآتية:

$$\tilde{\boldsymbol{f}}\left(\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}^{(\tau)}}\right) = \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha\lambda}\,\boldsymbol{\theta\beta}\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}^{(\tau)}}{}^{\boldsymbol{\beta-1}}\left[\mathbf{1} - \tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}^{(\tau)}}{}^{\boldsymbol{\beta}}\right]^{\boldsymbol{\theta-1}}\left[\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}^{(\tau)}}{}^{\boldsymbol{\beta}})^{\boldsymbol{\theta}}\right]^{\boldsymbol{\alpha\lambda-1}}\left[\mathbf{1} - \left[\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}^{(\tau)}}{}^{\boldsymbol{\beta}})^{\boldsymbol{\theta}}\right]^{\boldsymbol{\lambda}}\right]\left[\mathbf{2} - [\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}^{(\tau)}}{}^{\boldsymbol{\beta}})]^{\boldsymbol{\lambda}}\right]^{\boldsymbol{\alpha-1}}$$

$$. \ . \ . \ (\mathbf{2-17})$$

- الدالّة المعوّلية **(Reliability Function)** لتوزيع (TLKUM) الضبابي يمكن التمثيل عنها على وفق الصيغة الآتية:

$$\mathbf{R}\left(\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta})}\right) = \mathbf{1} - \boldsymbol{F}\left(\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau})}\right)$$

$$\mathbf{R}\left(\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta})}\right) = \mathbf{1} - \left\{\left(\mathbf{1} - \left(\mathbf{1} - \tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau})}{}^{\boldsymbol{\beta}}\right)^{\boldsymbol{\theta}}\right)^{\boldsymbol{\lambda}}\left[\mathbf{2} - \left(\mathbf{1} - \left(\mathbf{1} - \tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau})}{}^{\boldsymbol{\beta}}\right)^{\boldsymbol{\theta}}\right)^{\boldsymbol{\lambda}}\right]\right\}^{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\mathbf{0} < \mathbf{R}\left(\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta})}\right) < \mathbf{1} \qquad \ldots (\mathbf{2} - \mathbf{18})$$

2 – 8 طرائق التقدير : (Estimation Methods)

2 - 8 – 1 طريقة بيز القياسية[1][15][13] (Standard Bayes Method)

تعتمد طريقة بيز في تقدير المَعْلَمَات على استعمال معلومات أولية $(Prior\ Information)$ عن المَعْلَمَات غير المعلومة هذه المَعْلَمَات متغيّرات عشوائية $(Random\ variable's)$ ، وليست كميات ثابتة. إذْ تَنُصّ على أنّ الاعتماد على بيانات العيّنة الحالية يُعدّ غير كافٍ لتقدير المَعْلَمَات، هذه المعلومات الأولية يَتُمّ صياغتها على شكل توزيع احتمالي أولي، متمثّل في هذه الرسالة بدالّة كثافة احتمالية أولية $(Prior\ p.d.f)$ ، التي قد تكون غير ملائمة $(Improper)$ ، أيْ إنّ تكاملها لكُلّ مجال تعريفها لا يساوي واحداً. كذلك لبيانات العيّنة الحالية دور أساس في طريقة بيز في تقدير المَعْلَمَات والمتمثّلة بدالّة الإمكان $(Likelihood\ Function)$ الخاصّة بمشاهدات العيّنة الحالية، ونحصل بعد ذلك على التوزيع الاحتمالي اللاحق (Posterior Distribution) والناتج من دمج دالّة الكثافة الاحتمالية السابقة مع دالّة الإمكان الأعظم الحالية وعند دالّة خسارة Loss Function ، والتي يمكن بواسطتها معرفة الخسارة الناتجة باتخاذ القرار وبالاعتماد على قيمة $(\hat{\sigma})$. لكن القرار المراد اتّخاذه يعتمد على المَعْلَمَة (σ) بوجود فرق بين المَعْلَمَة وتقديرها.

ولإيجاد أيّ مقدّر على وفق أسلوب بيز يجب أنْ نحصل على الآتي:

1 – الدالّة الرئيسية : وهي الدالّة الاحتمالية الخاصّة بتوزيع البيانات $f(t_1 \ ،t_2 . \ . \ . \ t_n /\sigma)$ ، وعندها سنحصل على دالّة الإمكان للمشاهدات الحالية $L(t_1 \ ،t_2 . \ . \ . \ t_n /\sigma)$.

2 – التوزيع الاحتمالي السابق (Prior Distribution) يُرمز له بالرمز $\pi(\sigma)$.

3 – تطبيق أسلوب عملية الجمع ما بين دالّة الكثافة الاحتمالية الأولية، ودالّة الإمكان للمشاهدات باستعمال صيغة بيز العكسية $(Bayes\ Inversion\ Formula)$ يَتُمّ الحصول على التوزيع اللاحق والمتمثّل بدالّة الكثافة الاحتمالية اللاحقة $(Posterior\ p.d.f)$ ويُرمز لها $h(\sigma|t)$ وصيغتها:[1]

$$h(\sigma|t) = \frac{L(t|\sigma)\ \pi(\sigma)}{\int_{\forall\sigma} L(t|\sigma)\ \pi(\sigma)\ d\sigma} \qquad (2-19)$$

2 – 8 - 1 مقدّرات بيز الضبابية لمَعْلَمَات التوزيع المختلط $(TLKUM)$ المقترح

Informative Suggested *Fuzzy Bayes Standard EstimatorFor*

لنفرض أنّه لدينا أوقات فشل (t_1 ،t_2. . . . t_n) إذْ إنّ $t \in T$ لها توزيع (**Topp - Leone -Kumaraswamy**) بالمعالم ($\boldsymbol{\alpha}$، $\boldsymbol{\lambda}$، $\boldsymbol{\theta}$، $\boldsymbol{\beta}$) فإنّ المجموعة الضبابية عند القطع$(\tau - Cut)$ $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\tau} = (\tilde{t}_1$ ،$\tilde{t}_2$. . . . $\tilde{t}_n)$ ، إذْ إنّ $\tilde{t} \in \widetilde{T}$ ، $\boldsymbol{m}_{\tilde{t}}(\boldsymbol{t})$ لها توزيع $\tilde{\boldsymbol{t}} = (\mathbf{0}، \infty) \in \widetilde{\boldsymbol{T}}$ ، **(*TLKUM*)** ضبابي يحتوي على أربع معالم بدالّة الكثافة الاحتمالية الضبابية الآتية:

$$\tilde{f}(\tilde{t}_{A^{(\tau)}}) = 2\alpha\lambda\,\theta\beta\tilde{t}_{A^{(\tau)}}{}^{\beta-1}\left[1-\tilde{t}_{A^{(\tau)}}{}^{\beta}\right]^{\theta-1}\left[1-(1-\tilde{t}_{A^{(\tau)}}{}^{\beta})^{\theta}\right]^{\alpha\lambda-1}\left[1 - \left[1-(1-\tilde{t}_{A^{(\tau)}}{}^{\beta})^{\theta}\right]^{\lambda}\right]\left[2-[1-(1-\tilde{t}_{A^{(\tau)}}{}^{\beta})]^{\lambda}\right]^{\alpha-1}$$

. . . (2 -20)

ولنفرض أنّ هناك معلومات أولية عن المعالم الأربع المراد تقديرها($\boldsymbol{\alpha}$، $\boldsymbol{\lambda}$، $\boldsymbol{\theta}$، $\boldsymbol{\beta}$)، والمتمثّلة بدالّة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما مستقلّة بعضها مع البعض الآخر والتي تكون على وفق الشكل الآتي:

The prior is for all parameters is independent with gamma

$$\boldsymbol{\pi_1}(\boldsymbol{\alpha}، \boldsymbol{\lambda}، \boldsymbol{\theta}، \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha})^{a1-1}\, \boldsymbol{e}^{-b1\alpha} * (\boldsymbol{\lambda})^{a2-1}\, \boldsymbol{e}^{-b2\lambda} * (\boldsymbol{\theta})^{a3-1}\, \boldsymbol{e}^{-b3\theta} * (\boldsymbol{\beta})^{a4-1}\, \boldsymbol{e}^{-b3\beta}$$

. . . (2 -21)

وعند تعظيم دالّة التوزيع المختلط الضبابي والمتمثّل بالمعادلة (2-20) نحصل على:

$$\mathbf{L(ti}\,|\boldsymbol{\alpha}، \boldsymbol{\lambda}، \boldsymbol{\theta}، \boldsymbol{\beta}) = (2\alpha\lambda\,\theta\beta)^{n}\prod\prod \tilde{t}_{A^{(\beta)}}{}^{\beta-1}\left[1-\tilde{t}_{A^{(\beta)}}{}^{\beta}\right]^{\theta-1}\left[1-(1-\tilde{t}_{A^{(\beta)}}{}^{\beta})^{\theta}\right]^{\alpha\lambda-1}\left[1 - \left[1-(1-\tilde{t}_{A^{(\beta)}}{}^{\beta})^{\theta}\right]^{\lambda}\right]\left[2-[1-(1-\tilde{t}_{A^{(\beta)}}{}^{\beta})]^{\lambda}\right]^{\alpha-1}$$

. . . (2 -22)

وعليه يمكن التعبير عن دالّة الكثافة اللاحقة المشتركة بشكل تناسبي مع دالّة الكثافة الاحتمالية المشتركة وتكتب كالآتي:-

π (α ،λ، θ ،β | t) $\propto$ π $(\boldsymbol{\alpha}، \boldsymbol{\lambda}، \boldsymbol{\theta}، \boldsymbol{\beta})$L(t_i | α، λ، θ، β) . . .
(2 -23)

2 – 8 - 1 - 2 مقدّر بيز الضبابي لمَعْلَمَات التوزيع باستعمال دالّة خسارة الخطأ التربيعية

(*Fuzzy Bayes Estimator Using Squared Error Loss Function*

تُعدّ دالّة خسارة الخطأ التربيعية، والتي يرمز لها بالرمز(SELF) من أكثر دوال الخسارة شيوعاً واستعمالاً، وهي دالّة متماثلة، والصيغة الرياضية لها تعطى بالشكل الآتي:

$$L(\hat{\sigma}، \sigma) = c(\hat{\sigma}، \sigma)^2$$

وبالنظر للمعادلة المتقدّمة إذْ إنّ c هو ثابت حقيقي موجب، ولا يؤثّر في إيجاد مقدّر بيز، ويحذف عند اشتقاق مقدّر بيز بالنسبة لهذه الدالّة وبدون فقدان التعميم لنفرض $(c = 1)$ وبذلك تكون دالّة الخسارة التربيعية بالشكل الآتي:

$$L(\hat{\sigma}، \sigma) = (\hat{\sigma}، \sigma)^2$$

دالّة المخاطر $R_S=(\hat{\sigma}، \sigma)$ هي متوسّط اللاحق لدالّة الخسارة $L(\hat{\theta}، \theta)$ بالنسبة إلى

$h(\sigma/t)$

$$R_S(\hat{\sigma}، \sigma) = E[L(\hat{\sigma}، \sigma)]$$

$$R_S(\hat{\sigma}، \sigma) = \int_0^1 L(\hat{\sigma}، \sigma) h(\sigma/t) d\sigma$$

$$R_S(\hat{\sigma}، \sigma) = \int_0^1 (\hat{\sigma}، \sigma) h(\sigma/t) d\sigma$$

$$= \int_0^1 \hat{\sigma}^2 h(\sigma/t) d\sigma - \int_0^1 2\hat{\sigma}\sigma h(\sigma/t) d\sigma + \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma/t) d\sigma$$

$$R_S(\hat{\sigma}، \sigma) = \hat{\sigma}^2 - 2\hat{\sigma}E(\sigma/t) + E(\sigma^2/\,t) \quad . \quad . \quad . \quad \textbf{(2-24)}$$

وبالاشتقاق الجزئي لمعادلة (2-24) ومساواتها للصفر نحصل على الشكل الآتي:

$$2\hat{\sigma} - 2E(\sigma/t) = 0$$

$$\hat{\sigma}_S = E(\sigma/t) \quad . \quad . \quad . \quad \textbf{(2-25)}$$

الحالة الأولى- مقدّر بيز لمَعْلَمَة (α) باستعمال دالّة الخسارة الخطأ التربيعية

Bayesian estimation for α under Squared-Error Loss Function

إنّ مقدّر بيز للمَعْلَمَات في ظلّ دالّة الخسارة الخطأ التربيعية نفترض (u(α، λ، θ، β لأيّ دالّة من المَعْلَمَات وهو كالآتي:

$$\mathrm{E}[\mathrm{u}(\alpha، \lambda، \theta، \beta)] = \int_0^1 \int_0^1 u(\alpha، \lambda، \theta، \beta) h(\sigma، k/x_1، x_2، \ \ldots، x_n) d\alpha \, d\lambda \, d\theta \, d\beta$$

للحصول على مقدّر بيز من مَعْلَمَة الالتواء تحت دالّة الخسارة الخطأ التربيعية نفترض أنّ:

$$\mathrm{u}(\alpha) = \alpha$$

ومن ثَمّ

$$\mathrm{E}(\alpha/\underline{t}) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \alpha(2\alpha\lambda\,\theta\beta)^n \prod t^{\beta-1}[1-t^{\beta}]^{\theta-1}[1-(1-t^{\beta})^{\theta}]^{\alpha\lambda-1}\left[1-[1-(1-t^{\beta})^{\theta}]^{\lambda}\right]\left[2-[1-(1-t^{\beta})]^{\lambda}\right]^{\alpha-1}\pi_1(\alpha،\lambda،\theta،\beta)\, d\alpha d\lambda d\,\theta d\beta}{\int_0^1 \int_0^1 (2\alpha\lambda\,\theta\beta)^n \prod t^{\beta-1}[1-t^{\beta}]^{\theta-1}[1-(1-t^{\beta})^{\theta}]^{\alpha\lambda-1}\left[1-[1-(1-t^{\beta})^{\theta}]^{\lambda}\right]\left[2-[1-(1-t^{\beta})]^{\lambda}\right]^{\alpha-1}\pi_1(\alpha،\lambda،\theta،\beta)\, d\alpha d\lambda d\,\theta d\beta}$$

لملاحظة ذلك أو لصعوبة أيجاد الحلّ بواسطة التكامل تَمَّ استعمال ماركوف تشين مونت كارلو (MCMC)، وهي تقنية لتقدير التوزيعات الاحتمالية من خلال خوارزمية Metropolis-Hastings ، والآلية المذكوزة آنفاً يَتُمّ تقدير باقي المعالم الخاصّة بالتوزيع المختلط المستخدم.[15]

2 – 8 - 1 - 3 مقدّر بيز الضبابي لمَعْلَمَات التوزيع باستعمال دالّة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة (*Fuzzy Bayes Estimator Using* Weighted*Squared Error Loss Function*)

تُعدّ دالّة الخسارة التربيعية الموزونة من الدوال غير المتماثلة وتكون صيغتها:

$$\mathrm{L}(\hat{\sigma}، \sigma) = \frac{(\sum_{j=0}^{k} \mathbf{aj}\ \sigma_J)(\hat{\sigma}-\sigma)^{\,2}}{\sigma^{\,c}} \qquad \sigma > 0 \ ، a_j، j = 1،2، \ \ldots، k$$

C: قيمة ثابتة

إذْ إنّ دالّة المخاطرة هي التوقّع اللاحق لدالّة الخسارة:

$$(\hat{\sigma}، \sigma) = E[L(\hat{\sigma}، \sigma)]$$

$$\mathrm{R}(\hat{\sigma}، \sigma) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma^c} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j \boldsymbol{\sigma_J}\right)(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})^{\,2} h(\boldsymbol{\sigma}/\underline{x})\, d\boldsymbol{\sigma}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^c} (a_0 + a_1\boldsymbol{\sigma} + \cdots + a_k\boldsymbol{\sigma}^k)(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\,2} - 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^2) h(\boldsymbol{\sigma}/\underline{t})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

$$= a_0\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\,2} E\left(\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^c}/t\right) - 2a_0\hat{\boldsymbol{\sigma}} E\left(\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^{c-1}}/\underline{t}\right) + a_0 E\left(\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^{c-2}}/\underline{t}\right) + a_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\,2} E\left(\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^{c-1}}/t\right) - 2a_1\hat{\boldsymbol{\sigma}} E\left(\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^{c-2}}/t\right) + a_1 E\left(\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^{c-3}}/t\right) + \ldots + a_k\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\,2} E\left(\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^{c-k}}/t\right) - 2a_k\hat{\boldsymbol{\sigma}}\, E\left(\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^{c-(k+1)}}/t\right) + a_k E\left(\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^{c-(k+2)}}/t\right)$$

وباللاشتقاق الجزئي بالنسبة ل $(\hat{\sigma})$ ومساواتها للصفر

$$\frac{\partial R(\hat{\sigma}\cdot\sigma)}{\partial\hat{\sigma}} = 2a_0\hat{\sigma}E(\frac{1}{\sigma^c}/t)-2a_0E(\frac{1}{\sigma^{c-1}}/t)+2a_1\hat{\sigma}E(\frac{1}{\sigma^{c-1}}/t)-2a_1E(\frac{1}{\sigma^{c-2}}/t)+\ldots+2a_k\hat{\sigma}E(\frac{1}{\sigma^{c-k}}/t)$$
$$-2a_kE(\frac{1}{\sigma^{c-(k+1)}}/t)$$

ومن ثَمّ فإنّ مقدّر بيز تحت دالّة الخسارة التربيعية الموزونة تعطي بالشكل الآتي:

$$\hat{\sigma} = \frac{a_0E(\frac{1}{\sigma^{c-1}}/t)+a_1E(\frac{1}{\sigma^{c-2}}/t)+\cdots+a_kE(\frac{1}{\sigma^{c-(k+1)}}/t)}{a_0E(\frac{1}{\sigma^c}/t)+a_1E(\frac{1}{\sigma^{c-1}}/t)+\cdots+a_kE(\frac{1}{\sigma^{c-k}}/t)} \quad . \quad . \quad . \quad (2-26)$$

قام الباحث باقتراح ثلاث طرائق لتقدير معالم التوزيع الاحتمالي في ظلّ دالّة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة و كما يأتي : **[17]**

الحالة الأولى - مقدّر بيز لمَعْلَمَة (α) في ظلّ دالّة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة

الطريقة المعدّلة الأولى ($BayesWLS_{10}$) :- نفرض أنّ:

α=1 ، C = 0

$$\hat{\alpha}_{10} = \frac{a_0E(\alpha/t)+a_1E(\alpha^2/\underline{t})}{a_0+a_1E(\alpha/\underline{t})} \quad . \quad . \quad . \quad (2-27)$$

الطريقة المعدّلة الثانية ($BayesWLS_{11}$) :- نفرض أنّ:

α=1 ، C = 1

$$\hat{\alpha}_{11} = \frac{a_0+a_1E(\alpha/t)}{a_0E(\frac{1}{\alpha}/\underline{t})+a_1} \quad . \quad . \quad . \quad (2-28)$$

الطريقة المعدّلة الثالثة ($BayesWLS_{12}$) :- نفرض أنّ :

α=1 ،C=2

$$\hat{\alpha}_{12} = \frac{a_0E(\frac{1}{\alpha}/t)+a_1}{a_0E(\frac{1}{\alpha^2}/\underline{t})+a_1E(\frac{1}{\alpha}/t)} \quad . \quad . \quad . \quad (2-29)$$

وهكذا بالنسبة لبقية معالم التوزيع المختلط الضبابي يَتُمّ تقدير($\hat{\beta}$، $\hat{\theta}$ ، $\hat{\lambda}$) وعند الافتراضات نفسها.

2 – 8 - 2 خوارزمية التحسين للذئب الرمادي [10][6] Grey Wolf Optimization Algorithm

وهي إحدى أساليب طرائق الذكاء الاصطناعي التي تُسهم في حلّ المشاكل المعقّدة التي يعاني منها المجتمع المدروس ، وهذه الطريقة مستوحاة من السلوك الاجتماعي للذئاب الرمادية، تَمّ تقديمها لأول مرة من قبل الباحث *mirjalili &et al* في عام 2014 .[16]

تدور فكرة خوارزمية (GWO) حول محاكاة التسلسل الهرمي الاجتماعي للقيادة باستعمال سلوك الصيد للذئاب الرمادية في البرية إذْ تصطاد في مجموعات وتتعاون للقبض على الفريسة، تبدأ الخوارزمية من خلال التهيئة العشوائية لمجموعة من الحلول المرشّحة، والتي تمثّل مواقع الذئاب في مساحة البحث، ثُمّ يَتُمّ تحديث المواقف بشكل تكراري، وتستعمل مَعْلَمَاته لتقوم بتقليد سلسلة الأوامر وفقاً للقواعد الآتية:

المستوى الأول: تتمثّل بالمَعْلَمَة (α)، والتي تمثّل القائد والمسؤول عن إدارة وصناعة القرار في المجموعة.

المستوى الثاني: تتمثّل بالمَعْلَمَة (β)، والتي تأخذ دور الاستشارة، وتقديم المساعدة للمَعْلَمَة للمستوى الأول (α) في اتّخاذ القرارات وتنفيذ الحزم الإصلاحية في حالة الشيخوخة أو الوفاة.

المستوى الثالث: تتمثّل بالمَعْلَمَة (θ)، وتأخذ دور الحراسة والتجسّس ومراقبة الصيادين في المجموعة، وتراعي الذئاب المريضة والجريحة.

المستوى الرابع: يتمثّل بالمَعْلَمَة (λ) وهي أقلّ مرتبة في مجموعة الذئاب، وتلعب دور العميل، وتكون بمنزلة كبش الفداء ويتصدّى المهيمنون جميعهم.

يَتُمّ تحديث مواضع الذئاب باستعمال المعادلة الآتية:

$$\boldsymbol{t_{new} = t_{alpha} + A * (t_{beta} - t_{theta})} \quad \ldots\ldots \quad \boldsymbol{(2-30)}$$

إذْ إنّ:

t_{new}: تمثّل الموقع الجديد للذئب الحالي .

t_{alpha} ،t_{beta}، t_{theta}: تمثّل مواقع ذئاب المعالم على التوالي.

A : تمثّل متّجه للعيّنة العشوائية محصورة بين (2 ، 0).

يَتُمّ تقويم لياقة من خلال ملاءمة كُلّ ذئب على أساس الوظيفة الموضوعة للمشكلة، التي يَتُمّ حّلها، وينتهي عمل خوارزمية (GWO) عند استيفاء معايير الإيقاف المحدّدة مسبقاً عند الوصول إلى أقصى عدد من التكرارات، أو عند إيجاد حلّ مقنع.

3 - الجانب العملي

3-1 وصف البيانات: Data description

البيانات الحقيقية تمثّل أوقات تشغيل محرّك إنتاج الطاقة الكهربائية (Engine) لحين العطل، والتي تَمّ الحصول عليها من سجّلات محطّة جنوب بغداد الحرارية – الزعفرانية، والتي يبلغ عددها (n=70) محرّكا، وتمثّل مشاهدات العيّنة أوقات تشغيل المحرّك لحين العطل بالساعات لشهر واحد، وقد حُدّدتْ المدّة الزمنية لجمع البيانات من 1/ 3 / 2023 إلى 4/1 / 2023.

(3 -2) اختبار حسن المطابقة Good ness of Fit:

لغرض معرفة هل إنّ البيانات الحقيقية التي تمثّل أوقات العطل في محرّكات الطاقة الكهربائية تّتبع التوزيع المختلط المقترح أم لا فقد تَمّ اللجوء إلى استعمال اختبار الكاي سكوير وحسب الفرضية الإحصائية الآتية:

H_0: the data are (TLKUM)

H_1: the data are not (TLKUM)

والاختبار الفرضية المذكورة آنفاً، يَتُمّ احتساب مربّع كاي (Chi – Squared Statistic Test) وكما يأتي:

$$(\boldsymbol{\chi_C})^{\boldsymbol{2}} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \left(\frac{\boldsymbol{O_i - E_i}}{\boldsymbol{E_i}}\right)^{\boldsymbol{2}} \quad \ldots \quad (\mathbf{1-3})$$

يَتُمّ استخراج القيمة المحسوبة لهذا الاختبار من استعمال الدالّة الجاهزة (Chi2Gof) في برنامج (Matlab) بعد تعريف دالّة التوزيع (CDF) للتوزيع المقترح الجديد وملاءمتها بدالّة (CDF) المقدّرة للبيانات الحقيقية، وأظهرت البرنامج النتائج الآتية:

الجدول (3 - 1) يمثّل نتائج اختبار حسن المطابقة

Distribution	$\boldsymbol{\chi_C}^{\boldsymbol{2}}$	$\chi table^2$	P-Value	Decision
Topp – Leone Kumaraswamy	1.2888	3.8415	0.25626	Accept H_0

أظهرت نتائج الجدول(3-1) بأنّ قيمة $(\boldsymbol{\chi_C})^{\boldsymbol{2}}$ قد بلغت (1.2888)، وهي أقل من القيمة الجدولية والبالغة ($\boldsymbol{\chi_{table}}^{\boldsymbol{2}} = \mathbf{3.8415}$)، وكذلك قيمة (P-Value) هي أقلّ من (0.05). على وفقاً ذلك لا ترفض فرضية العدم (تقبل)، والبيانات تتوزّع وفقاً لتوزيع المقترح (TL- KUM).

3- 3 النتائج: Results

اتّضح من خلال الجدول رقم (3-1)، أفضلية التوزيع المقترح (TLKUM) لتمثيل البيانات الحقيقية، ووفقاً لذلك تَمّ تقدير مَعْلَمَات التوزيع المختلط باستعمال برنامج (matlab)؛ بغية الحصول على أفضل طريقة يَتُمّ عندها تقدير دالّة المعوّلية الضبابية $(\tilde{R}_t)$، و كما في الجدول (3-2).

الجدول (3 – 2) يبيّن تحليل البيانات الحقيقية عند طرائق التقدير المستعملة ولمستويات القطع جميعها

Cat	Meth	B LS	$BWLS_{10}$	$BWLS_{11}$	$BWLS_{12}$	GWO
0.2	$\hat{\sigma}$	0.022	0.0431	0.8210	2.321	3.281
	MSE	0.0821	0.0804	0.4210	0.5341	0.578
0.4	$\hat{\sigma}$	4.6382	0.23214	0.02190	0.24391	0.483
	MSE	2.0188	**0.0717**	0.0824	0.0832	0.943
0.6	$\hat{\sigma}$	2.9231	0.0620	0.0921	2.9231	2.452
	MSE	**0.6421**	0.06423	0.07231	0.7172	0.267
0.8	$\hat{\sigma}$	2.4321	2.4351	0.4318	0.3421	0.897
	MSE	0.067	**0.064**	0.065	0.0731	0.068

وأظهرت نتائج الجدول (3-2)، تفوّق طريقة بيز القياسي المعلوماتي عند دالّة خسارة موزونة $(BWLS_{10})$ ، إذْ حصلت على أقلّ (MSE) لمعظم مستويات القطع، لذا سَيتُمّ تقدير دالّة المعوّلية بالاعتماد على هذه الطريقة وكما يأتي:

الجدول (3 – 3) يبيّن تقدير المعوّلية الضبابية بيانات التوزيع عند طريقة تقدير($BWLS_{10}$) ولمستويات القطع جميعها

I	t_i	$\tilde{R}_{BWLS10}$	F_{BWLS10}
1	2.430	0.986843	0.013157
2	2.435	0.975049	0.024951
3	2.454	0.963254	0.036746
4	2.620	0.951463	0.04854
5	2.832	0.939666	0.060334
6	2.952	0.927871	0.072129
7	3.200	0.916077	0.083923
8	3.228	0.904283	0.095717
9	3.343	0.892489	0.107511
10	3.512	0.880694	0.119306
11	3.620	0.86893	0.1311
12	3.643	0.857106	0.142894
13	3.700	0.750957	0.249043
14	3.750	0.739163	0.260837
15	3.781	0.727369	0.272631
16	3.992	0.715574	0.284426
17	3.999	0.70378	0.29622
18	4.1110	0.70114	0.2989
19	4.2000	0.6786	0.3214
20	4.2250	0.6568	0.3432
21	4.3320	0.6561	0.3439
22	4.3420	0.6414	0.3586
23	4.4250	0.64134	0.359
24	4.5320	0.63693	0.3631
25	4.5370	0.63223	0.3678
26	4.6320	0.61861	0.3814
27	4.6410	0.61876	0.382
28	4.6600	0.61779	0.3823

29	4.6820	0.60061	0.3994
30	4.7870	0.59797	0.4021
31	4.8310	0.59689	0.4032
32	4.8920	0.58019	0.4199
33	4.9960	0.57985	0.4202
34	4.9990	0.57773	0.4223
35	5.1210	0.56862	0.4314
36	5.1780	0.56149	0.4386
37	5.2610	0.55939	0.4407
38	5.3300	0.55693	0.4431
39	5.3890	0.49389	0.507
40	5.3950	0.49232	0.5077
41	5.4310	0.485991	0.5141
42	5.4420	0.47836	0.5217
43	5.4720	0.46920	0.5308
44	5.4900	0.46295	0.5371
45	5.9900	0.44949	0.5506
46	5.9980	0.44965	0.551
47	6.0210	0.43742	0.5626
48	6.0420	0.43057	0.5695
49	6.1120	0.42559	0.5745
50	6.2000	0.41358	0.5865
51	6.2210	0.41145	0.589
52	6.2240	0.40885	0.5912
53	6.3890	0.40785	0.5922
54	6.4000	0.39689	0.6032
55	6.4260	0.39638	0.6037
56	6.5980	0.38382	0.6162
57	6.6010	0.37419	0.6259
58	6.6070	0.33251	0.6675

59	6.6210	0.30692	0.6931
60	6.6280	0.30313	0.6969
61	6.6980	0.29725	0.703
62	6.7110	0.29347	0.71
63	6.7450	0.28729	0.7128
64	6.7920	0.23483	0.7652
65	6.8340	0.20333	0.7967
66	6.8390	0.18818	0.812
67	6.9900	0.16129	0.839
68	6.9970	0.13983	0.8602
69	7.2250	0.13746	0.8626
70	7.464	0.13689	0.8632
Sum	**357.197**	**38.87076**	**31.13867**
Mean	**5.103**	**0.5553**	**0.4448**

4-الاستنتاجات والتوصيات:

من خلال تطبيق طريقة التقدير للمَعْلَمَات و اختبار حسن المطابقة للتوزيع، يمكن الإشارة إلى بعض الاستنتاجات التي توصّل لها الباحث، والتوصيات التي يعتقد أنّها ضرورية.

4-1 الاستنتاجات

1. أقدم الباحث على توظيف توزيع كوماراسوامي بمَعْلَمَتي خلط، ثُمّ بعد ذلك أدخلها على الدالّة المولّدة (Topp-Leon) ممّا نتج عنها توزيع جديد مختلط (كوماراسوامي - تابليون)، يحتوي على أربع معالم شكل، ومن ثَمّ إثبات أنّ التوزيع احتمالي.
2. توافق بيانات أوقات اشتغال محرّك الطاقة الكهربائية مع توزيع المختلط (TL-KUM) الضبابي عند تقدير مَعْلَمَات هذا التوزيع بطريقة بيز القياسية ($BWLS_{10}$).
3. إنّ المعدّل التقديري لمتوسّط فترة تشغيل المحرّك لحين العطل يبلغ (5.103)، أيْ ما يعادل ستة أيام وسبع ساعات بانحراف معياري بلغ (1.359) يعتمد على الجهاز في أداء عمله من دون عطل اعتمادا على طريقة ($BWLS_{10}$).
4. إنّ قيمة دالّة الكثافة التجميعية (CDF) للفشل متزايدة مع مرور الزمن، أيْ إنّ العلاقة التي تربط بينهما هي علاقة طردية، وهذا ما تَمّتْ ملاحظته في العمود الثالث F(t)، إذْ بلغ متوسّط قيمتها (0.4448)، أيْ بنسبة (44%) لا يعوّل على المحرّكات (150.39) ساعة تقريباً.

5. بلغ متوسّط أوقات الاشتغال لحين التوقّف عن العمل (العطل (5.103)، والذي يساوي (150.39) بانحراف معياري بلغ (1.359)، أيْ ما يعادل ستة أيام وسبع ساعات يعتمد عليها المحرّك في أداء عمله من دون توقّف.

2-4 التوصيات:

1. استعمال أنواع جديدة من التوزيعات المختلطة مع الدالّة المولّدة للتوزيعات (Topp-Leone)، وتكوين توزيع جديد يمتاز بالمرونة العالية في تمثيل بيانات أوقات الفشل.
2. استعمال طرائق تقدير بيزية مع دوال خسارة مختلفة وخوارزمية أخرى (كخوارزمية السرب SSA، خوارزمية التطوّر التفاضلي DE، وخوارزمية EM، والشبكات العصبية – الاصطناعية لتقدير معوّلية التوزيع المقترح (TL-KUM) الضبابي.
3. نوصي بتطبيق التوزيع المختلط (TL-KUM) على قطاعات أخرى: كالقطاع الصناعي، والزراعي، والتجاري، والطبي، والهندسي وغيرها من القطاعات.
4. التوسّع باستعمال المنطق الضبابي؛ والسبب يعود لكونه أداة لحلّ الكثير من مشاكل عدم الدقّة والغموض في إجراء القياسات، ومن ثمّ يعطي نتائج أكثر دقّة في حالة البيانات الضبابية.
5. نوصي بإجراء الدراسات والبحوث المستقبلية التي تهدف إلى تقدير معوّلية دالّة التوزيع المقترح (TL- KUM) في حالة وجود بيانات خاضعة للرقابة.

المصادر:

اولاً: المصادر العربية

1. الحسناوي، أموري هادي، القيسي، باسم شليبه" القياسي الاقتصادي المتقدّم، النظرية والتطبيق" المكتبة الوطنية، دار الكتب والوثائق، بغداد، (2002).
2. عثرى، هبة إبراهيم محمد" التحليل الفازي لاتّخاذ القرار الأمثل- دراسة تطبيقية " اطروحة دكتوراه، جامعة دمياط كُلّية التجارة، قسم الإحصاء التطبيقي والتأمين، 2012
3. علي، بشار خالد" طريقة جديدة بيزية ضبابية حصينة عامّة للتوزيعات الاحتمالية" اطروحة دكتوراه، جامعة كربلاء، كُلّية الإدارة والاقتصاد، قسم الإحصاء، 2022.

ثانياً : المصادر الاجنبية

4. Abdul Razak .K & Raja Kumar .K" A study on Fuzzy Reliability Measure" Applied Mathematic Science ، Vol .7 ، No .67 ، 2013 ، PP3335 – 3343.
5. Al – Shomrani .A & Arif .O & et al " Topp – Leone family of distribution " journal statistical oper .res ، 2016 ، PP443- 451 .
6. DADA . E . G & JOSEPH .S.B & ET AL " Application of Grey Wolf Optimization Algorithm : Recent Trends ، Issues ، and possible horizons " Gazi University journal of science ، Vol .35 ، No .2 ، (2022) ، PP485 – 504 .

7. Gokarna R. Aryal & et al " the Topp – Leone Generated Weibull Distribution :Regression Model، Characterization and Applications" international journal of Statistics and probability ، Vol .6 ، No .1 ، 2017.

8. Guanrong .C &Tat pham.T ، (2001)" introduction to fuzzy sets and fuzzy control systems " Boca Raton London New Work Washington ، D.C . CRC Press .

9. Hassan . A & Elgarhy . M، Ragab . R" Statistical properties and estimation of inverted Topp – Leone Distribution " journal of Statistics Applications and probability ، Vol .9 ، NO.2 ، 2020 ، PP319 – 331 .

10. I . AL- Jadir & W.A. Mahmoud " A Grey Wolf Optimizer feature selection method and it effect on the performance of document classification problem " journal port science Research Vol . 4 ، No .2 ، (2021) .

11. Iman .A. Zayer " Fuzzy Logic Control of Crane System " the Iraqi journal for mechanical and material engineering ، Vol .11 ، No.3 ، 2011 .

12. Javan Shiri .Z & Habibi Rad .A & et al " EXP- Kumaraswamy Distributions : Some properties and Applications ، Journal of Science ، Islamic Republic of Iran ، Vol .26 ، No.1 ، 2015 ، PP 57 – 69 .

13. Lagarias، J. C.، J. A. Reeds، M. H. Wright، and P. E. Wright. "Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions." SIAM Journal of Optimization. Vol. 9، Number 1، 1998، pp. 112–147.

14. Mohammed ، Roqia Read & et al " ، Estimation of Reliability Function for kumaraswamy Distribution " Journal of Economics and Administrative Science ، 2019 ،Vol .25 ، NO. 15 ، PP 432 – 451 .

15. Mood ،A.M ، Greybill ، F.A & et al (1985) " introduction to theory of statistics " third edition ، mc graw . Hill ، Inc .

16. Mirjalili S، Mirjalili SM، and Lewis A (2014). Grey wolf optimizer. Advances in Engineering Software، 69: 46-61.

17. Nathier ،A. Ibrahim & Hussein ، A . Mohammed " Parameters and Reliability estimation for the Fuzzy exponential Distribution " American Journal of Mathematics and Statistics ، 2017 ، 7(4) ، PP 143 – 151 .

18. Kamary .K " Non – informative priors and modelization by mixtures" university paris Science et letters ، English NNT، 2016

19. Neamah، M. W & Ali ، B. K " Fuzzy Reliability estimation for frechet distribution by using simulation" ، periodicals of engineering and natural science ،Vol .8 ، No .2 ، June 2020 ، PP. 632 – 646.

20. Sivandam .S.N & Deepa .S.N ،(2007)"introduction to fuzzy logic using matlab with 304 figures and 37 tables " springer – verlage berlin Heidelberg .

21. Yasser . S. ALHARBI & AMR.R. KAMEL ، " Fuzzy System Reliability Analysis For Kumarsawamy Distribution Bayesian and non- Bayesian estimation with Simulation and an Application on Cancer Data Set" Wseas transactions on biology and biomedicine ،VOL 19 . NO . 14 ، 2022.